Chapitre 9 – Systèmes et matrices

1 Introduction

1. Le système linéaire :

$$(\mathcal{S})\qquad \left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{1,1}\, X_1 & + & \alpha_{1,2}\, X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,n}\, X_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\, X_1 & + & \alpha_{2,2}\, X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,n}\, X_n & = & \beta_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{p,1}\, X_1 & + & \alpha_{p,2}\, X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{p,n}\, X_n & = & \beta_p \end{array}\right.$$

peut être représenté par les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$$

A est la *matrice du système*, X la *matrice des inconnues* et B le *second membre*.

2. Puisque :

$$\begin{array}{ccc} A & X & \\ \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\, X_1 + \alpha_{1,2}\, X_2 + \cdots + \alpha_{1,n}\, X_n \\ \alpha_{2,1}\, X_1 + \alpha_{2,2}\, X_2 + \cdots + \alpha_{2,n}\, X_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{p,1}\, X_1 + \alpha_{p,2}\, X_2 + \cdots + \alpha_{p,n}\, X_n \end{pmatrix} \end{array}$$

la matrice X représente une solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $A\,X = B$. Lee système linéaire est donc équivalent à l'*équation matricielle* :

$$\boxed{A\,X = B}$$

3. On résout le système initial en fabriquant des sytèmes auxiliaires. Chacun correspond à une équation matricielle : si A_k est la matrice du sytème $(\mathcal{S}_k)$, et B_k le second membre, ce système correspond à l'équation matricielle $A_k\,X = B_k$.

- On passe de $(\mathcal{S}_{k-1})$ à $(\mathcal{S}_k)$ par des transformations qui portent sur les équations de $(\mathcal{S}_{k-1})$:

$$[\mathcal{E}_j \to \alpha\mathcal{E}_j] \qquad [\mathcal{E}_i \rightleftarrows \mathcal{E}_j] \qquad [\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i + \alpha\mathcal{E}_j]$$

- On va voir comment ces transformations font passer de A_{k-1} et B_{k-1} à A_k et B_k.

2 Les matrices élémentaires

1. La transformation $[\mathcal{E}_j \to \alpha\mathcal{E}_j]$

- On note $D_j(\alpha)$ la matrice qui se déduit de I_p, la matrice identité d'ordre p, en remplaçant le j^e coefficient diagonal par α.

Exemple : Avec $p = 4$ et $j = 2$:

$$D_2(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème : Si M est de dimension $p \times n$, la matrice $D_j(\alpha)\,M$ a les mêmes lignes que M, exceptée la j^e qui est multipliée par α.

Exemple :
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&4&3\\1&2&0\\3&7&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&3\\4&8&0\\3&7&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

• La transformation $[\mathcal{E}_j \to \alpha\mathcal{E}_j]$ fait passer d'un système $(\mathcal{S})$ à un système $(\mathcal{S}')$. D'après le théorème précédent, $A' = D_j(\alpha)\,A$ et $B' = D_j(\alpha)\,B$. On a donc :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & (\mathcal{S}) & A\,X = B \\ \mathcal{E}_j \to \alpha\mathcal{E}_j & \downarrow & \downarrow \\ & (\mathcal{S}') & D_j(\alpha)\,A\,X = D_j(\alpha)\,B \end{array}}$$

Théorème : La transformation $[\mathcal{E}_j \to \alpha\mathcal{E}_j]$ revient à *multiplier à gauche par $D_j(\alpha)$* l'équation matricielle $A\,X = B$.

2. La transformation $[\mathcal{E}_i \rightleftarrows \mathcal{E}_j]$

• On note $T_{i,j}$ la matrice obtenue en échangeant la i^e et la j^e *ligne* de I_p.

Exemple : Avec $p = 5$, $i = 2$, $j = 5$:
$$T_{2,5} = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&\mathbf{1}\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&\mathbf{1}&0&0&0\end{pmatrix}$$

Théorème : Si M est de dimension $p \times n$, la matrice $T_{i,j}\,M$ a les mêmes lignes que M, exceptée la i^e et la j^e qui sont échangées.

Exemple :
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&\mathbf{1}\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&\mathbf{1}&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&4&3\\\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\3&7&1\\1&1&2\\\mathbf{2}&\mathbf{5}&\mathbf{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&3\\\mathbf{2}&\mathbf{5}&\mathbf{9}\\3&7&1\\1&1&2\\\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

• La transformation $[\mathcal{E}_i \rightleftarrows \mathcal{E}_j]$ fait passer d'un système $(\mathcal{S})$ à un système $(\mathcal{S}')$. D'après le théorème précédent, $A' = D_j(\alpha)\,A$ et $B' = D_j(\alpha)\,B$. On a donc :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & (\mathcal{S}) & A\,X = B \\ \mathcal{E}_i \rightleftarrows \mathcal{E}_j & \downarrow & \downarrow \\ & (\mathcal{S}') & T_{i,j}\,A\,X = T_{i,j}\,B \end{array}}$$

Théorème : La transformation $[\mathcal{E}_i \rightleftarrows \mathcal{E}_j]$ revient à *multiplier à gauche par $T_{i,j}$* l'équation matricielle $A\,X = B$.

3. La transformation $[\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i + \alpha\mathcal{E}_j]$

• On note $U_{i,j}(\alpha)$ la matrice qui se déduit de I_p en insérant le coefficient α à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne.

Exemple : Avec $p = 5$, $i = 5$, $j = 2$:

$$U_{3,4}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\alpha} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème : Si M est de dimension $p \times n$, la matrice $U_{i,j}(\alpha)\, M$ a les mêmes lignes que M, exceptée la i^e qui est remplacée par la somme de la i^e ligne et de α fois la j^e.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

• La transformation $[\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i + \alpha \mathcal{E}_j]$ fait passer d'un système $(\mathcal{S})$ à un système $(\mathcal{S}')$. D'après le théorème précédent, $A' = D_j(\alpha)\, A$ et $B' = D_j(\alpha)\, B$. On a donc :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & (\mathcal{S}) & A\,X = B \\ \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i + \alpha\mathcal{E}_j & \downarrow & \downarrow \\ & (\mathcal{S}') & U_{i,j}(\alpha)\, A\, X = U_{i,j}(\alpha)\, B \end{array}}$$

Théorème : La transformation $[\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i + \alpha\mathcal{E}_j]$ revient à *multiplier à gauche par* $U_{i,j}(\alpha)$ l'équation matricielle $A\,X = B$.

4. Les matrices $D_i(\alpha)$, $T_{i,j}$, $U_{i,j}(\alpha)$ sont les *matrices élémentaires*. Du point de vue des équations matricielles la méthode du pivot consiste à *multiplier à gauche* la *matrice du système initial*, par des *matrices élémentaires* bien choisies, jusqu'à ce qu'on obtienne la *matrice du système terminal*, qui est particulièrement simple.
La correspondance entre transformation d'équations et matrices élémentaires est donnée par :

$$\boxed{\begin{array}{rl} \mathcal{E}_i \to \alpha\,\mathcal{E}_i & D_i(\alpha) \\ \mathcal{E}_i \rightleftarrows \mathcal{E}_j & T_{i,j} \\ \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i + \alpha\,\mathcal{E}_j & U_{i,j}(\alpha) \end{array}}$$

4. Dans l'exemple du chapitre précédent, le système $(\mathcal{S}_0)$ se traduit par $A_0\,X = B_0$, avec :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 & -10 & 20 \\ -2 & 6 & 20 & 19 & -28 \\ 3 & -5 & -18 & -25 & 43 \\ 1 & -2 & -7 & -9 & 15 \end{pmatrix}}_{A_0} \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2p+1 \end{pmatrix}}_{B_0}$$

Étape 1 : On passe de $(\mathcal{S}_0)$ à $(\mathcal{S}_1)$ en faisait successivement : $[\mathcal{E}_4 \to \mathcal{E}_4]$, $[\mathcal{E}_4 \rightleftarrows \mathcal{E}_1]$, $[\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_1]$, $[\mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3 - 3\mathcal{E}_1]$, $[\mathcal{E}_4 \to \mathcal{E}_4 - 2\mathcal{E}_1]$, ce qui revient à multiplier à gauche l'équation $A_0\,X = B_0$ par :

$$U_{4,1}(-2)\; U_{3,1}(-3)\; U_{2,1}(2)\; T_{4,1}\; D_4(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 & -10 & 20 \\ -2 & 6 & 20 & 19 & -28 \\ 3 & -5 & -18 & -25 & 43 \\ 1 & -2 & -7 & -9 & 15 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2p+1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & -9 & 15 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & 8 & -10 \end{pmatrix}} X = \overset{B_1}{\begin{pmatrix} 2p+1 \\ 4p+1 \\ -6p-6 \\ -2p-2 \end{pmatrix}}$$

Étape 2 : On passe de $(\mathcal{S}_1)$ à $(\mathcal{S}_2)$ en faisait successivement : $[\mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3]$, $[\mathcal{E}_3 \rightleftarrows \mathcal{E}_2]$, $[\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 - 2\mathcal{E}_2]$, $[\mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3 + 2\mathcal{E}_2]$, $[\mathcal{E}_4 \to \mathcal{E}_4 + 3\mathcal{E}_2]$, ce qui revient à multiplier à gauche l'équation $A_1\,X = B_1$ par :

$$U_{4,2}(-3)\ U_{3,2}(-2)\ U_{1,2}(2)\ T_{3,2}\ D_3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & -9 & 15 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & 8 & -10 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2p+1 \\ 4p+1 \\ -6p-6 \\ -2p-2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}} X = \overset{B_2}{\begin{pmatrix} -10p-11 \\ -6p-6 \\ 16p+13 \\ 14p+16 \end{pmatrix}}$$

Étape 3 : On ne fait rien.

Étape 4 : On passe de $(\mathcal{S}_3)$ à $(\mathcal{S}_4)$ en faisait : $[\mathcal{E}_4 \to \frac{1}{2}\mathcal{E}_4]$, $[\mathcal{E}_4 \rightleftarrows \mathcal{E}_3]$, $[\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1 + 5\mathcal{E}_3]$ $[\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2 - 2\mathcal{E}_3]$, $[\mathcal{E}_4 \to \mathcal{E}_4 + 3\mathcal{E}_3]$, ce qui revient à multiplier à gauche l'équation $A_3\,X = B_3$ par :

$$U_{4,3}(3)\ U_{2,3}(-2)\ U_{1,3}(5)\ T_{4,3}\ D_4(\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} X = \overset{B_4}{\begin{pmatrix} 25p+29 \\ -20p-22 \\ 7p+8 \\ 37p+37 \end{pmatrix}}$$

Étape 5 : On ne fait rien.

$$\overset{A_5}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} X = \overset{B_5}{\begin{pmatrix} 25p+29 \\ -20p-22 \\ 7p+8 \\ 37p+37 \end{pmatrix}}$$

5. Multiplication à droite par les matrices élémentaires

Théorème : Soit M une matrice de dimension $p \times n$:

• $M\,U_{i,j}(\alpha)$ a les mêmes colonnes que M, sauf la i^e colonne qui est remplacée par la somme de la i^e colonne et de α fois la j^e.

• $M\,D_i(\alpha)$ a les mêmes colonnes que M, sauf la i^e colonne qui est multipliée par α.

• $M\,T_{i,j}$ a les mêmes colonnes que M, sauf la i^e et la j^e colonne qui sont échangées.

3 Matrices régulières et matrices inversibles

1. La matrice A est *régulière* si le système associé à l'équation matricielle $AX = B$ admet *une* et *une seule* solution quel que soit le second membre B. Un système dont la matrice des coefficients est régulière s'appelle un *système de Cramer*.

Théorème : Une matrice carrée qui possède une inverse à gauche est régulière.
Démonstration : $AX = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$ donc il existe toujours une solution unique.

2. On suppose que A est une matrice *régulière*.

► Le système terminal obtenu en résolvant $A\,X = B$ n'a pas d'équation du type $0 = b$ car il suffirait de prendre $b \neq 0$ pour obtenir un système impossible :

$\Rightarrow$ le système terminal n'a *que* des équations non déplaçables,

$\Rightarrow$ le système terminal a *autant* d'équations non déplaçables que d'équations,

$\Rightarrow$ parce qu'il y a *une et une seule* inconnue principale par équation non déplaçable du système terminal, le système a *autant d'inconnues principales que d'équations*.

► S'il avait des *inconnues non principales*, le système aurait plusieurs solutions.

$\Rightarrow$ le système terminal n'a *que* des inconnues principales.

Conclusion : Quand A est une matrice *régulière*, la matrice des coefficients du sytème terminal est forcément la *matrice identité*.

Théorème : Les matrices régulières sont les matrices carrées qui possèdent une inverse à gauche.

3. On regroupe les résultats :

• Une matrice régulière est forcément carrée, son rang est égal à sa dimension, elle ne possède pas de pivot nul.

• Une matrice carrée dont le rang est égal à la dimension est régulière.

• Une matrice carrée qui ne possède pas de pivot nul est régulière.

• Une matrice régulière possède une inverse à gauche.

• Une matrice qui possède une inverse à gauche est régulière.

4. Soit A une matrice carrée. Un système de la forme $A\,X = 0$, avec les seconds membres nuls, s'appelle un système *homogène*. Un tel système admet toujours la *solution nulle* $X = 0$, mais est-ce qu'il en a d'autres ?

► si A est *régulière*, le système a *une seule solution*, c'est donc la solution nulle.

► si A est *singulière*, le système a des inconnues non principales, et il a donc *une infinité de solutions*.

• Le système terminal obtenu avec la méthode de Gauss contient au moins une équation du type $0 = 0$. Cette équation a été obtenue en faisant une combinaison linéaire des équations du système initial :

$$a_1\mathcal{E}_1 + a_2\mathcal{E}_2 + \cdots + a_p\mathcal{E}_p \;\rightarrow\; [0 = 0]$$

Si $a_k \neq 0$, en divisant tous les coefficients par $-a_k$, on obtient que l'équation $\mathcal{E}_k$ est une combinaison linéaire des autres équations. On dit que les équations sont *liées*.

• Réciproquement, si les équations du système sont liées, un choix convenable des pivots fera apparaître une équation du type $0 = 0$ et la matrice A est singulière.

5. **Théorème** : Les matrices élémentaires sont inversibles :

$$\boxed{D_i(\alpha)^{-1} = D_i(\alpha^{-1}) \qquad T_{i,j}^{-1} = T_{i,j} \qquad U_{i,i}(\alpha)^{-1} = U_{i,i}(-\alpha)}$$

Théorème : Les produits de matrices élémentaires sont inversibles et leurs inverses sont aussi des produits de matrices élémentaires.
Démonstration : Cela résulte de $(M_1 M_2 \cdots M_n)^{-1} = M_n^{-1} M_{n-1}^{-1} \cdots M_1^{-1}$.

Rappel : Quand une matrice a une inverse à gauche et une inverse à droite, ces inverses sont uniques et sont égales.

► Soit A une matrice ayant une *inverse à gauche*.

• Elle est régulière, donc la résolution du système $A\,X = B$ multiplie A à gauche par des matrices élémentaires jusqu'à ce qu'on obtienne la matrice identité :

$$\underbrace{E_p \cdots E_2\, E_1}_{A'}\ A = I$$

• A possède une *inverse à gauche* A' qui est un produit de matrices élémentaires.

• Parce que A' est un produit de matrices élémentaires, elle est inversible.

• L'égalité $A'A = I$ montre que A est l'inverse de A', donc *A est un produit de matrices élémentaires* et A est inversible.

► Soit A une matrice ayant une *inverse à droite*.

• Il existe A'' telle que $A\,A'' = I$, et la matrice A'' est donc *inversible à gauche*. Il en résulte que A, son inverse à gauche, est un produit de matrices élémentaires et que A est inversible.

4 Calcul de l'inverse d'une matrice

1. Si A' est l'inverse de A, la multiplication à gauche par A' donne :

$$\begin{array}{ccc} & A & I \\ \boxed{\times A'} & \downarrow & \downarrow \\ & I & A' \end{array}$$

Multiplier à gauche par A' revient à faire les *transformations de la méthode de Gauss*, d'où l'idée de faire *simultanément* ces transformations sur A et sur I.

2. **Méthode pratique pour calculer l'inverse d'une matrice**

• On écrit la matrice identité I_n, à droite de A, ce qui donne une matrice M de dimension $n \times 2n$.

• On déroule les étapes de la méthode du pivot en appliquant les transformations aux lignes de M plutôt qu'à A toute seule.

• Si on rencontre un pivot nul dans A, c'est que A n'est pas inversible, le calcul s'arrête.

• Si aucun pivot n'est nul, au bout des n étapes, A est remplacée par la matrice identité dans M et la matrice identité est remplacée par l'inverse de A.

Exemple : On écrit d'abord la identité à côté de A, puis on applique la méthode du pivot. :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&2\\1&3&2&4\\5&1&1&2\\0&1&4&4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad M=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&2&1&0&0&0\\1&3&2&4&0&1&0&0\\5&1&1&2&0&0&1&0\\0&1&4&4&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}\boxed{1}&0&2&2&1&0&0&0\\1&3&2&4&0&1&0&0\\5&1&1&2&0&0&1&0\\0&1&4&4&0&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&2&1&0&0&0\\0&3&0&2&-1&1&0&0\\0&1&-9&-8&-5&0&1&0\\0&1&4&4&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&2&1&0&0&0\\0&3&0&2&-1&1&0&0\\0&\boxed{1}&-9&-8&-5&0&1&0\\0&1&4&4&0&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&2&1&0&0&0\\0&\boxed{1}&-9&-8&-5&0&1&0\\0&3&0&2&-1&1&0&0\\0&1&4&4&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&2&1&0&0&0\\0&1&-9&-8&-5&0&1&0\\0&0&27&26&14&1&-3&0\\0&0&13&12&5&0&-1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&2&1&0&0&0\\0&1&-9&-8&-5&0&1&0\\0&0&\boxed{27}&26&14&1&-3&0\\0&0&13&12&5&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&2&1&0&0&0\\0&1&-9&-8&-5&0&1&0\\0&0&1&\frac{26}{27}&\frac{14}{27}&\frac{1}{27}&-\frac{3}{27}&0\\0&0&13&12&5&0&-1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&2&1&0&0&0\\0&1&-9&-8&-5&0&1&0\\0&0&1&\frac{26}{27}&\frac{14}{27}&\frac{1}{27}&-\frac{3}{27}&0\\0&0&13&12&5&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&\frac{2}{27}&-\frac{1}{27}&-\frac{1}{27}&\frac{6}{27}&0\\0&1&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1&\frac{26}{27}&\frac{14}{27}&\frac{1}{27}&-\frac{3}{27}&0\\0&0&0&-\frac{14}{27}&-\frac{47}{27}&-\frac{13}{27}&\frac{12}{27}&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&\frac{2}{27}&-\frac{1}{27}&-\frac{1}{27}&\frac{6}{27}&0\\0&1&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1&\frac{26}{27}&\frac{14}{27}&\frac{1}{27}&-\frac{3}{27}&0\\0&0&0&\boxed{-\frac{14}{27}}&-\frac{47}{27}&-\frac{13}{27}&\frac{12}{27}&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&\frac{2}{27}&-\frac{1}{27}&-\frac{2}{27}&\frac{6}{27}&0\\0&1&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1&\frac{26}{27}&\frac{14}{27}&\frac{1}{27}&-\frac{3}{27}&0\\0&0&0&1&\frac{47}{14}&\frac{13}{14}&-\frac{12}{14}&-\frac{27}{14}\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&\frac{1}{7}\\0&1&0&0&-\frac{18}{7}&-\frac{2}{7}&\frac{4}{7}&\frac{9}{7}\\0&0&1&0&-\frac{19}{7}&-\frac{6}{7}&\frac{5}{7}&\frac{13}{7}\\0&0&0&1&\frac{47}{14}&\frac{13}{14}&-\frac{6}{7}&-\frac{27}{14}\end{array}\right)$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&\frac{1}{7}\\-\frac{18}{7}&-\frac{2}{7}&\frac{4}{7}&\frac{9}{7}\\-\frac{19}{7}&-\frac{6}{7}&\frac{5}{7}&\frac{13}{7}\\\frac{47}{14}&\frac{13}{14}&-\frac{6}{7}&-\frac{27}{14}\end{pmatrix}}$$

Chapitre 10 – Déterminants

5 Les formules de Cramer

1. Le *système linéaire général d' ordre m* est un système ayant *m équations* et *m inconnues*, et dont les coefficients et les seconds membres sont des *paramètres*. :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}\,X_1 & + & \alpha_{1,2}\,X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,m}\,X_m & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\,X_1 & + & \alpha_{2,2}\,X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,m}\,X_m & = & \beta_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{m,1}\,X_1 & + & \alpha_{m,2}\,X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m,m}\,X_m & = & \beta_m \end{cases}$$

Il admet une *solution unique* car, dans le cas contraire, il aurait un pivot nul, et pour cela, il faudrait que ses coefficients soient liés entre eux par certaines relations, ce qui n'est pas le cas.

► Le système général le plus simple, $\alpha_{1,1}X_1 = \beta_1$, admet l'unique solution : $\boxed{X_1 = \dfrac{\beta_1}{\alpha_{1,1}}}$

► Le système général l d'ordre 2 : $\begin{cases} \alpha_{1,1}\,X_1 & + & \alpha_{1,2}\,X_2 & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\,X_1 & + & \alpha_{2,2}\,X_2 & = & \beta_2 \end{cases}$

admet l'unique solution : $\boxed{\begin{array}{l} X_1 = \dfrac{\beta_1\,\alpha_{2,2} - \beta_2\,\alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}} \\[2ex] X_2 = \dfrac{-\beta_1\,\alpha_{2,1} + \beta_2\,\alpha_{1,1}}{\alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}} \end{array}}$

► Le système général l d'ordre 3 : $\begin{cases} \alpha_{1,1}\,X_1 & + & \alpha_{1,2}\,X_2 & + & \alpha_{1,3}\,X_3 & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\,X_1 & + & \alpha_{2,2}\,X_2 & + & \alpha_{2,3}\,X_3 & = & \beta_2 \\ \alpha_{3,1}\,X_1 & + & \alpha_{3,2}\,X_2 & + & \alpha_{3,3}\,X_3 & = & \beta_3 \end{cases}$

admet l'unique solution :

$$\boxed{\begin{array}{l} X_1 = \dfrac{\beta_1\,(\alpha_{2,2}\alpha_{3,3} - \alpha_{2,3}\alpha_{3,2}) + \beta_2\,(\alpha_{1,3}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{3,3}) + \beta_3\,(\alpha_{1,2}\alpha_{2,3} - \alpha_{1,3}\alpha_{2,2})}{\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}+\alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1}+\alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1}-\alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}} \\[2ex] X_2 = \dfrac{\beta_1\,(\alpha_{2,3}\alpha_{3,1} - \alpha_{2,1}\alpha_{3,3}) + \beta_2\,(\alpha_{1,1}\alpha_{3,3} - \alpha_{1,3}\alpha_{3,1}) + \beta_3\,(\alpha_{1,3}\alpha_{2,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,3})}{\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}+\alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1}+\alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1}-\alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}} \\[2ex] X_3 = \dfrac{\beta_1\,(\alpha_{2,1}\alpha_{3,2} - \alpha_{2,2}\alpha_{3,1}) + \beta_2\,(\alpha_{1,2}\alpha_{3,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{3,2}) + \beta_3\,(\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1})}{\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}+\alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1}+\alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1}-\alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}} \end{array}}$$

Les formules encadrées sont les cas les plus simples de *formules de Cramer*.

2. Qu'observe-ton ?

• les X_i sont toujours représentés par des fractions,

• le dénominateur est le même pour $X_1, X_2, \ldots, X_m$,

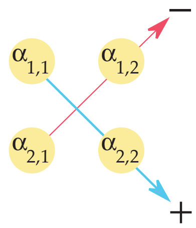
• chaque numérateur est la somme des β_i avec des coefficients où n'interviennent que certains $\alpha_{i,j}$,

• les coefficients des β_i ressemblent tous au dénominateur des formules de Cramer d'ordre $m-1$.

On va essayer de deviner ce que pourrait être le *dénominateur des formules de Cramer*, quand m est quelconque. Ce nombre, noté Δ_m, s'appelera le *déterminant d'ordre m*.

$$\Delta_1 = \alpha_{1,1} \qquad \Delta_2 = \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}$$



$$\Delta_3 = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3} + \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1} + \alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}$$

Règle de Sarrus.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}$$