Analyse et Calcul Matriciel

MVA 101

Corrigé du devoir $n°5$

Exercice n°1

1°) la fonction $\Phi : t \to \exp(-a|t|)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc y est localement intégrable, et comme $t^2\exp(-a|t|) \to 0$ quand $t \to \infty$ elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc posséde une transformée de Fourier.

$$\hat{\Phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a|t| - 2i\pi t\xi)dt = \int_{-\infty}^{0} \exp(at - 2i\pi t\xi)dt + \int_{0}^{+\infty} \exp(-at - 2i\pi t\xi)dt$$

$$= \left[\frac{\exp(at - 2i\pi t\xi)}{a - 2i\pi\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{\exp(-at - 2i\pi t\xi)}{-a - 2i\pi\xi}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{a - 2i\pi\xi} + \frac{1}{a + 2i\pi\xi} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$$

2°) Appliquons la transformée de Fourier à l'équation intégro-différentielle, on obtient en notant $Y(s)$ la transformée de Fourier de $y(t)$ et en remarquant que l'intégrale est le produit de convolution de y avec la fonction Φ ;

$$Y(s) + Y(s)\hat{\Phi}(s) = \hat{\Phi}(s) \Leftrightarrow Y(s)\left[1 + \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 s^2}\right] = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 s^2}$$

D'où l'on tire ;

$$Y(s) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 s^2 + 2a}$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse on en déduit que :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a\exp(2i\pi ts)}{a^2 + 4\pi^2 s^2 + 2a} ds$$

Posons $\alpha = \sqrt{a^2 + 2a}$, sachant que l'on a trouvé au 1°) que

$$F(\exp(-a|t|))(s) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 s^2} \Rightarrow F\left(\frac{\exp(-a|t|)}{2a}\right)(s) = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 s^2}$$

On en déduit que :

$$\bar{F}\left(\frac{1}{a^2 + 4\pi^2 s^2}\right) = \frac{\exp(-a|t|)}{2a} \Rightarrow \bar{F}\left(\frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 s^2}\right) = \frac{\exp(-\alpha|t|)}{2\alpha}$$

D'où l'on tire que :

$$y(t) = 2a\frac{\exp(-\alpha|t|)}{2\alpha} = \frac{a\exp(-|t|\sqrt{a^2 + 2a})}{\sqrt{a^2 + 2a}}$$

Exercice n°2

Résolvons le système par la méthode de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{lr} & x+my+z=1 \\ (L_2-mL_1) & (1-m^2)y-z=0 \\ (L_3-L_1) & (1-m)y+(m-1)z=m \end{array}\right.$$

On voit que le système n'a pas de solution si $m=1$ car la dernière équation s'écrit alors $0=1$.

Supposons donc $m\neq 1$ et échangeons les lignes (2) et (3), on obtient alors ;

$$\left\{\begin{array}{lr} & x+my+z=1 \\ & (1-m)y+(m-1)z=m \\ (L_3-(m+1)L_2) & -m^2z=-m(m+1) \end{array}\right.$$

Si $m=0$ la dernière équation s'écrit $0z=0$ donc z est arbitraire et le système admet une infinité de solutions qui sont :
$y=z,\ x=1-z$ (droite de $\mathbb{R}^3$).

Si $m\neq 0$ on obtient une solution unique (système de Cramer) ;

$$z=\frac{m+1}{m} \qquad y=z+\frac{m}{m-1}=\frac{1}{m(1-m)} \qquad x=1-z-my=\frac{1}{m(m-1)}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆