Analyse et Calcul Matriciel

MVA 101

Corrigé du devoir $n°1$

Exercice n°1

Pour la première série on a $u_n = \frac{n}{n^2+n+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ or la série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente donc la première série diverge.

Pour la deuxième série on peut faire un développement limité mais il est plus simple de multiplier par la quantité conjuguée, on obtient ;

$$u_n = \sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2+n+1} = \frac{n^2+n+2-(n^2+n+1)}{\sqrt{n^2+n+2}+\sqrt{n^2+n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n+2}+\sqrt{n^2+n+1}} \sim \frac{1}{2n}.$$

Donc la deuxième série diverge.

Pour la troisième série utilisons la régle de Cauchy on a

$$\sqrt[n]{u_n} = (\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3})^{-n} < 2^{-n} \Rightarrow \lim \sqrt[n]{u_n} = 0 < 1$$

Donc la troisième série converge .

Pour la quatrième série on ne peut pas obtenir un équivalent de u_n en $\frac{1}{n^\alpha}$ mais l'on peut faire une comparaison indirecte avec une série de Riemann en effet on a :

$$n^{\frac{3}{2}} u_n = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} \to 0$$

Donc la quatrième série converge car son terme général est négligeable devant $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente puisque $\frac{3}{2} > 1$.

Pour la cinquième série utilisons le test de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)(n+3)...(2n+2)(2n)^n}{(2n+2)^{n+1}(n+1)(n+2)...(2n)} = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n)^n}{(2n+2)^{n+1}(n+1)} = \frac{(2n+1)(2n)^n}{(2n+2)^n(n+1)} = \frac{(2n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)}$$

Or $\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$ tend vers $\frac{1}{e}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{2}{e}$ qui est strictement inférieur à 1 donc la cinquième série converge.

La nature de la sixième série s'obtient immédiatement par un équivalent de u_n sachant que $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ on a donc $u_n \sim n\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente puisque $2 > 1$ donc cette sixième série converge aussi.

Sachant que $1 - \operatorname{ch} u \sim -\frac{u^2}{2}$ au voisinage de 0 on obtient pour n tendant vers l'infini que $u_n = 1 - \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim -\frac{1}{2n}$ en remplacant u par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ donc la septième série diverge.

La dernière série est plus compliquée à étudier car il y a à la fois des puissances et des factorielles, il vaut mieux se débarrasser des factorielles donc utilisons le critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\ln(n+1))^{n+1} n!}{(n+1)!(\ln n)^n} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$$

On sait que $\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ mais la suite $X_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$ se présente sous la forme indéterminée 1^∞ quand n tend vers $+\infty$. On peut écrire :

$$X_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \left(\frac{\ln[n(1+\frac{1}{n})]}{\ln n}\right)^n = \left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^n$$

Prenons le logarithme de X_n, comme $\ln(1+u) \sim u$ au voisinage de 0 on obtient :

$$\ln X_n = n \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right) \sim n\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \sim n\frac{1}{n\ln n} = \frac{1}{\ln n}$$

Donc $\ln X_n$ tend vers 0 et donc X_n tend vers 1 d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0 et donc la dernière série est convergente.

Exercice n°2

La fonction tangente étant croissante et valant 0 en 0 on en déduit que quand n tend vers $+\infty$, $\mid u_n \mid = \tan\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant donc la première série converge d'après le théorème des séries alternées .

Effectuons un développement limité pour étudier la seconde série :

$$u_n = (-1)^n\sqrt{n}\ln\frac{n-1}{n+1} = (-1)^n\sqrt{n}\ln\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = (-1)^n\sqrt{n}\left(\ln(1-\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{n})\right)$$

$$= (-1)^n\sqrt{n}\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n\sqrt{n}\left(-\frac{2}{n} - \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

soit :

$$u_n = -\frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{2(-1)^n}{3n^{\frac{5}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)$$

Les 3 membres de ce développement limité étant des termes généraux de séries convergentes, cette seconde série converge.

Effectuons de même un développement limité pour étudier cette troisième série car ici, si l'on voit bien que la valeur absolue du terme général tend vers 0, il n'est pas évident de déterminer si c'est en décroissant ou non .

$$\mid u_n \mid = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}\right)} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\left(1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} + \frac{1}{n^{\frac{2}{6}}} + \frac{1}{n^{\frac{3}{6}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right)$$

d'où :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}} + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{5}{6}}} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{7}{6}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}\right)$$

Les 5 membres du développement limité sont des termes généraux de séries convergentes , donc cette troisième série converge.

Pour cette dernière série on peut écrire que :

$$u_n = \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n+1})\right) = (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

Il est alors facile de voir que $\mid u_n \mid = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ tend vers 0 en décroissant et donc cette dernière série est convergente d'après le théorème des séries alternées .

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆