MVA101 - ED 2 : Séries numériques à termes positifs

Rappels de cours : Comment déterminer la nature d'une série ?

- **Critère grossier de convergence :** (condition nécessaire de convergence)
  Théorème : Pour qu'une série de terme général u_n converge il faut que la suite (u_n) tende vers 0.
  Attention : Ceci n'est pas une condition suffisante !

  Les développements limités des fonctions usuelles autour de 0 peuvent être utilisés afin d'écrire le terme u_n sous une autre forme et déterminer plus facilement s'il tend vers 0 ou non:

$$\boxed{\begin{array}{c} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{array}}$$

- **Séries géométriques :**
  Soit la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n$
  - si $a = 1$, la série diverge car $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n = n+1$ et tend donc vers $+\infty$
  - si $a \neq 1$, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ et :
    - si $|a| > 1$, a^n diverge et donc la série diverge
    - si $|a| < 1$, dans ce cas $a^n \longrightarrow 0$ et la série converge vers $\frac{1}{1-a}$
- **Séries de Riemann :**
  On appelle série de Riemann la série suivante : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$,
  - si $|\alpha| \leq 1$, la série diverge
  - si $|\alpha| > 1$, la série converge
- **Théorème des comparaisons :**
  Théorème : Soient deux séries à termes positifs u_n et v_n. Supposons que pour tout n on ait $u_n \leq v_n$.
  - Si la série de terme général v_n converge il en est de même pour la série de terme général u_n.
  - Si la série de terme général u_n diverge il en est de même pour la série de terme général v_n.
- **Règle de D'Alembert:**
  Théorème : Soit une série de terme général u_n.
  - Si la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et est strictement inférieure à 1 la série converge.
  - Si la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et est strictement supérieure à 1 la série diverge.
  - On ne peut rien dire si la limite vaut 1.
- **Règle de Cauchy:**
  Théorème : Soit une série de terme général u_n.
  - Si la limite de $\sqrt[n]{u_n}$ existe et est strictement inférieure à 1 la série converge.
  - Si la limite de $\sqrt[n]{u_n}$ existe et est strictement supérieure à 1 la série diverge.
  - On ne peut rien dire si la limite vaut 1.

Exercice 1

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

On pourra s'aider du critère de Cauchy :

> *Pour que la suite de terme général (u_n) converge il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ on puisse trouver un entier N_ε tel que pour $p \geq q \geq N_\varepsilon$ on ait $u_q + \cdots + u_p \leq \varepsilon$.*

Exercice 2

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ de terme général u_n égal à :

1. $\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{2n}$
2. $\frac{1}{n\cos^2(n)}$
3. $\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$
4. $\frac{2}{\sqrt{n}}$
5. $\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$
6. $\left(\frac{-1}{3}\right)^n$
7. $\frac{n}{2^n}$
8. $\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$
9. $\frac{1}{n!}$
10. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
11. $\frac{n^{10000}}{n!}$
12. $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
13. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
14. $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$