# Chapitre 5 – Transformée de Fourier (*suite et fin*)

## 1 Transformée de Fourier (*suite*)

3. **Questions et débuts de réponses**

**Q1** : Quelles fonctions ont une transformée de Fourier ?

**Q2** : Comment reconnaître une transformée de Fourier ?

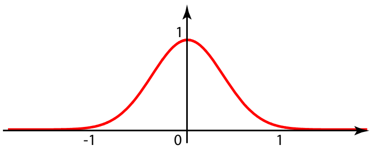
**Q3** : Comment retrouver $f$ à partir de $\widehat{f}$ ?

**R1** : Les fonctions utiles qui ont une transformée de Fourier sont les fonctions $f$ de classe $C^0$ par morceaux telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\,f(x)\,|dx$ existe, et parmi elles, il y a deux ensembles importants :

► Les fonctions $C^0$ par morceaux à *support compact* : ce sont les fonctions $f$ pour qui il existe un nombre $T$ tel que $f(x) = 0$ quand $|\,x\,| > T$. Par exemple la *fonction créneau* dont on a calculé la transformée de Fourier.

► Les fonctions $C^\infty$ à *décroissance rapide* : ce sont les fonctions $f$ infiniment dérivables, telles que, quel que soit $p$ et quel que soit $k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |\,x^k\, f^{(p)}(y)| = 0$.

**Exemple** : $f(x) = e^{-\pi\, x^2}$ dont la courbe représentative est la *courbe en cloche*.




**Théorème** : Si $f$ est à décroissance rapide, il en est de même de $\widehat{f}$. Toute fonction à décroissance rapide est la transformée de Fourier d'une et d'une seule fonction à décroissance rapide.

**R2** : Si $f$ est de classe $C^0$ par morceaux et si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\,f(x)\,|dx$ existe, on démontre que $\widehat{f}$ est continue, et que $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \widehat{f}(y) = 0$.

**4. Transformée de Fourier réciproque.**

**Théorème** : Si $f$ est de classe $C^1$ par morceaux, et si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\,f(x)\,|dx$ existe, sa transformée de Fourier admet elle aussi une transformée de Fourier et : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\; e^{+2\pi i\, x\, y} dy = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}}$.

En particulier : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\; e^{+2\pi i\, x\, y} dy = f(x)}$ quand $f$ est continue au point $x$.

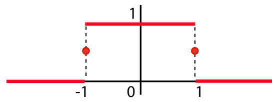
La transformation : $\psi \mapsto \phi$ avec $\phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\; e^{+2\pi i\, x\, y} dy$ s'appelle la *transformée de Fourier réciproque*.

**Exemple** : Soit $f$ la fonction créneau $\Rightarrow$ $\widehat{f}(y) = \dfrac{2\sin(2\pi y)}{2\pi y}$. Si :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(2\pi y)}{2\pi y}\; e^{+2\pi i\, x\, y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(2\pi y)}{2\pi y}\; \cos(2\pi x y) dy$$

le théorème précédent dit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(2\pi y)}{2\pi y} \cos(2\pi xy)dy = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 1/2 & \text{si } |x| = \pm 1 \end{cases}$$




*Donc l'intégrale n'est pas continue quand $x = \pm 1 \ldots$ !* Pour vérifier, on la calcule :

$$2\sin a \, \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \qquad \Rightarrow g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi y(1+x)}{2\pi y} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi y(1-x)}{2\pi y} dy$$

On note : $\Im = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi v}{2\pi v} dv.$

$\boxed{x \neq -1}$ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi y(1+x)}{2\pi y} dy \overset{y(1+x)\to v}{=} \int_{\frac{-\infty}{1+x}}^{\frac{+\infty}{1+x}} \frac{\sin 2\pi v}{2\pi v} dv = \begin{cases} +\Im & \text{si } x > -1 \\ -\Im & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

$\boxed{x \neq +1}$ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi y(1-x)}{2\pi y} dy \overset{y(1-x)\to v}{=} \int_{\frac{-\infty}{1-x}}^{\frac{+\infty}{1-x}} \frac{\sin 2\pi v}{2\pi v} dv = \begin{cases} -\Im & \text{si } x > 1 \\ +\Im & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $x < -1$ | $g(x) = -\Im + \Im = 0$ |
| $x = -1$ | $g(x) = +0 + \Im = \Im$ |
| $-1 < x < +1$ | $g(x) = +\Im + \Im = 2\Im$ |
| $x = +1$ | $g(x) = +\Im + 0 = \Im$ |
| $1 < x$ | $g(x) = +\Im - \Im = 0$ |

Reste à calculer $\Im$ : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi v}{2\pi v} dv = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi v}{2\pi v} dv \overset{2\pi v \to t}{=} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{2}$

et par conséquent on a bien : $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\, e^{+2\pi i x y} dy = f(x).$

5. On introduit la fonction $f_-(x) = f(-x)$ qu'on appelle la *symétrique* de $f$.

**Propriétés** :

- $\boxed{(f_-)_- = f}$ : la symétrique de la symétrique est la fonction.
- $\boxed{\widehat{(f_-)} = \left(\widehat{f}\right)_-}$ : la transformée de Fourier de la symétrique est la symétrique de la transformée de Fourier.

6. En changeant $x$ en $-x$, la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\, e^{+2\pi i x y} dy = f(x)$ s'écrit :

$$\boxed{\widehat{\widehat{f}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\, e^{-2\pi i x y} dy = f(-x) = f_-(x)} \qquad \boxed{\widehat{\widehat{f}} = f_-}$$

- En faisant 2 fois $\mathcal{F}$, on va de $f$ à : $\widehat{\widehat{f}} = f_-$ $\quad \boxed{f \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f} \xrightarrow{\mathcal{F}} f_-}$
- En faisant 3 fois $\mathcal{F}$, on va de $f$ à : $\widehat{\widehat{\widehat{f}}} = \widehat{(f_-)} = \left(\widehat{f}\right)_-$ $\quad \boxed{f \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f} \xrightarrow{\mathcal{F}} f_- \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{(f_-)}}$
- En faisant 4 fois $\mathcal{F}$, on revient à $f$ : $\quad \boxed{f \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f} \xrightarrow{\mathcal{F}} f_- \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{(f_-)} \xrightarrow{\mathcal{F}} f}$

$$\boxed{\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}} = f}$$

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \widehat{f} \\ \uparrow \mathcal{F} & & \mathcal{F} \downarrow \\ \widehat{f_-} & \xleftarrow{\mathcal{F}} & f_- \end{array}$$

**Théorème** : Si $f$ a une transformée de Fourier et si les intégrales suivantes existent (par exemple quand $f$ est $C^\infty$ à décroissance rapide), on a la *formule de Bessel-Parseval* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(y)|^2 dy$$

**Exemple** : Avec $f$ créneau et $\widehat{f}(y) = \dfrac{2\sin 2\pi y}{2\pi y}$, cela donne :

$$2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\sin 2\pi y}{2\pi y}\right)^2 dy \quad \overset{2\pi y \to t}{\Rightarrow} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{y}\right)^2 dt = \pi}$$

## 2 Opérations sur les transformées de Fourier

1. **Linéarité** $\boxed{\mathcal{F}(a_1 f_1 + \cdots + a_p f_p) = a_1 \mathcal{F}(f_1) + \cdots + a_p \mathcal{F}(f_p)}$

2. **Homothétie** : Si $v$ est un nombre réel non nul : $\boxed{f_v(x) = f(vx) \quad \Rightarrow \quad \widehat{f_v}(y) = \frac{1}{|v|} \widehat{f}\left(\frac{y}{v}\right)}$

$$\widehat{f_v}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v\,x)\, e^{-2\pi i\, xy} dx \quad \overset{x \to u/v}{=} \quad \int_{-\infty v}^{+\infty v} f(u)\, e^{-2\pi i\, u \frac{y}{v}} \frac{du}{v}$$

**Cas particulier** : $f_{-1}(x) = f(-x) = f_-$ donc $\boxed{\widehat{f_-}(y) = \widehat{f}(-y)}$

*La transformée de Fourier de la symétrique est la symétrique de la transformée de Fourier.*

3. **Translation** : Si $a \in \mathbb{R}$ : $\boxed{f(x-a) \quad \overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} \quad e^{-2\pi i\, a\, y}\, \widehat{f}(y)}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\, e^{-2\pi i\, xy} dx \quad \overset{x \to a+u}{=} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-2\pi i\,(a+u) y} du = e^{-2\pi i\, a\, y}\, \widehat{f}(y)$$

4. **Multiplication par une exponentielle** : Si $a \in \mathbb{R}$ : $\boxed{e^{2\pi i\, a x} f(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} \quad \widehat{f}(y-a)}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\, ax} f(x)\, e^{-2\pi i\, xy} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-2\pi i\, x(y-a)} du = \widehat{f}(y-a)$$

5. **Dérivations**
**Théorème** : Si $f$ est une fonction $C^\infty$ à décroissance rapide :

$$\boxed{(2\pi\, i\, y)^n\, \widehat{f}(y) = \mathcal{F}[\, f^{(n)}(x)\,]} \qquad \boxed{\widehat{f}^{(n)}(y) = \mathcal{F}[\,(-2\pi\, i\, x)^n f(x)\,]}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-2\pi i\, xy} dx = \Big[f(x)\, e^{-2\pi i\, xy}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i\, y) f(x)\, e^{-2\pi i\, xy} dx$$

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i\, xy} dx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i\, x) f(x)\, e^{-2\pi i\, xy} dx$$

6. **Produit de convolution**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions classe $C^0$ par morceaux. Leur *produit de convolution* est la fonction $h = f * g$ définie par :

$$\boxed{h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du}$$

**Théorème** :

- Si $f$ et $g$ sont à support fini, il en est de même de $f * g$.
- Si $f$ et $g$ sont à d'écroissance rapide, il en est de même de $f * g$.

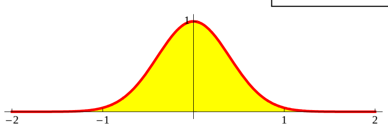
$$\boxed{f_1 * f_2 = f_2 * f_1} \qquad \boxed{f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3} \qquad \boxed{\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)} \qquad \boxed{\mathcal{F}(f\, g) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)}$$

## 3 Un calcul de transformée de Fourier

$$\boxed{f(x) = e^{-\pi x^2}} \quad \Rightarrow \quad \widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\, e^{-2\pi i\, xy} dx = ? \; = g(y)$$

- $f'(x) = -2\pi x\, e^{-\pi x^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(x) = -2\pi x\, f(x)}$
- $\widehat{f'} = \mathcal{F}(-2\pi x\, f) = \mathcal{F}(2\pi(-i)^2 x\, f) = -i\,\mathcal{F}(-2\pi i\, x\, f)$
- $2\pi i\, y\, \widehat{f}(y) = -i\, \widehat{f}\,'(y) \quad \Rightarrow \quad \boxed{g'(y) = -2\pi y\, g(y)}$
- $\left(\dfrac{g}{f}\right)' = \dfrac{g' f - g f'}{f^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad g = C\, f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\widehat{f}(y) = g(0)\, e^{-\pi y^2}}$

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = ?$$




- $\widehat{f} = g(0)\, f \quad \Rightarrow \quad \widehat{\widehat{f}} = g(0)\, \widehat{f} = g(0)^2\, f$
- $\widehat{\widehat{f}} = f_- = f \quad \Rightarrow \quad f = g(0)^2\, f \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(0)^2 = 1}$
- $g(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(0) = 1}$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1} \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\, e^{-2\pi i\, xy} dx = e^{-\pi y^2}}$$