Chapitre 5 – Transformée de Laplace (*suite et fin*)

3 Opérations sur les transformées de Laplace (*suite*)

Théorème : Soit f une fonction dérivable. Si f et f' sont à croissance exponentielle : $\boxed{\mathcal{L}(f') = p\,\mathcal{L}(f) - f(0)}$

$$\int_0^A f'(t)\,e^{-pt}dt = \left[f(t)\,e^{-pt}\right]_0^A + p\int_0^A f(t)\,e^{-pt}dt \;\Rightarrow\; \int_0^\infty f'(t)\,e^{-pt}dt = \lim_{A\to+\infty}\left(f(A)\,e^{-pA} - f(0) + p\int_0^A f(t)\,e^{-pt}dt\right)$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(f(A)\,e^{-pA}\right) - f(0) + \lim_{A\to+\infty}\left(p\int_0^A f(t)\,e^{-pt}dt\right) = 0 - f(0) + p\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt$$

Par récurrence, on obtient la formule suivante (*valable quand f est dérivable autant de fois qu'il faut !*)

$$\boxed{\mathcal{L}(f^{(n)}) = p^n\,\mathcal{L}(f) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - p\,f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

4 Utilisation des transformées de Laplace

1. **Exercice** : Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 5y(t) \\ y'(t) = x(t) - 3y(t) \end{cases}$ avec $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

En notant $U = \mathcal{L}(x)$, $V = \mathcal{L}(y)$ et en prenant les transformées de Laplace des équations, on obtient :

$$\begin{cases} p\,U(p) - 1 = U(p) + 5V(p) \\ p\,V(p) - 2 = U(p) - 3V(pt) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-1)U(p) - 5V(p) = 1 \\ -U(p) + (p+3)V(p) = 2 \end{cases}$$

On résout : $U(p) = \dfrac{p+13}{p^2+2p-8} = \dfrac{5/2}{p-2} - \dfrac{3/2}{p+4} \Rightarrow \boxed{x(t) = \dfrac{5}{2}e^{2t} - \dfrac{3}{2}e^{-4t}}$

$V(p) = \dfrac{2p-1}{p^2+2p-8} = \dfrac{1/2}{p-2} + \dfrac{3/2}{p+4} \Rightarrow \boxed{y(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t} + \dfrac{3}{2}e^{-4t}}$

2. La méthode est générale :

i) On cherche à résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants, dont les inconnues sont des fonctions $x(t), y(t), \ldots$

ii) La transformation de Laplace fait passer du système différentiel à un système linéaire (L) dont les inconnues sont les transformées de Laplace $X(p), Y(p), \ldots$ de $x(t), y(t), \ldots$

iii) Les coefficients de (L) sont des polynômes en p. Ses solutions sont donc des fractions rationnelles (*polynôme divisé par un polynôme*).

iv) Ces fractions rationnelles tendent vers 0 quand p tend vers $+\infty$, parce que ce sont des transformées de Laplace. En les décomposant en éléments simples, on les écrit comme une somme de termes du type $\dfrac{Cte}{(p-a)^{n+1}}$ avec $n \geqslant 0$, a réel ou complexe.

On utilise les formules : $\boxed{t^n e^{at} \sqsupset \dfrac{n\,!}{(p-a)^{n+1}}}$ $\boxed{\dfrac{1}{(p-a)^n} \sqsubset \dfrac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)\,!}}$ pour retrouver l'original de chaque élément simple et l'on obtient ainsi les originaux de $X(p), Y(p), \ldots$

3. **Conclusion** : Au moyen des deux formules encadrées, la transformation de Laplace met en correspondance bijective l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions qui sont la somme de polynômes multipliés par des exponentielles avec l'ensemble $\mathcal{F}$ des fractions rationnelles dont le degré du dénominateur est strictement plus grand que le degré du numérateur.

Exemple 1 : $\boxed{t^n e^{a\,t} \sqsupset \dfrac{n\,!}{(p-a)^{n+1}}}$

$$f(t) = t^2 \cos t = \frac{1}{2} t^2\, e^{+i\,t} + \frac{1}{2} t^2\, e^{-i\,t} \;\Rightarrow\; f(t) \sqsupset \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(p+i)^3} + \frac{2}{(p-i)^3}\right) = \frac{2p\left(p^2-3\right)}{\left(p^2+1\right)^3}$$

Exemple 2 : $\boxed{\dfrac{1}{(p-a)^n} \sqsubset \dfrac{t^{n-1} e^{a\,t}}{(n-1)\,!}}$

$$\phi(p) = \frac{p^3 + 2p + 2}{p^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{1}{p^2} + \frac{(1-2\,i)/2}{p + (1+i)} + \frac{(1+2\,i)/2}{p + (1-i)} \;\Rightarrow$$

$$\phi(p) \sqsubset t + \frac{(1-2\,i)}{2} t\, e^{(1+i)t} + \frac{(1+2\,i)}{2} t\, e^{(1-i)t} = t + t\, e^t \cos t + 2t\, e^t \sin t$$

5 Produit de convolution

1. Soient f et g deux fonctions causales de classe C^0 par morceaux. Leur *produit de convolution* est la fonction $h = f * g$ définie par :

$$\boxed{h(t) = \int_0^t f(u) g(t-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du}$$

Théorème : La fonction $f * g$ est causale $\boxed{f * g = g * f}$

$\boxed{f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2}$ $\boxed{\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\, \mathcal{L}(g)}$

2. **Exemple :** $t^a * t^b \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_0^t u^a (t-u)^b du \overset{t \to u\,v}{=} t^{a+b+1} \underbrace{\int_0^1 v^a (1-v)^b dv}_{B(a,b)} \;\Rightarrow\; \boxed{t^a * t^b = B(a,b) t^{a+b+1}}$

$B(a,b) = ?$ $\quad \mathcal{L}(t^a * t^b) = \mathcal{L}(t^a)\, \mathcal{L}(t^b) \;\Rightarrow\; B(a,b) \mathcal{L}(t^{a+b+1}) = \mathcal{L}(t^a)\, \mathcal{L}(t^b) \;\Rightarrow$

$$B(a,b) \frac{(a+b+1)\,!}{p^{a+b+2}} = \frac{a\,!}{p^{a+1}} \frac{b\,!}{p^{b+1}} \;\Rightarrow B(a,b) = \boxed{\int_0^1 v^a (1-v)^b dv = \frac{a\,!\, b\,!}{(a+b+1)\,!}}$$

3. Pour résoudre une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, à coefficients constants : $a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = s(t)$, on note $X = \mathcal{L}(x)$ et $S = \mathcal{L}(s)$, puis on prend les transformées de Laplace des deux membres de l'équation différentielle :

$$a\left(p^2 X(p) - p\,x(0) - x'(0)\right) + b\,(p\,X(p) - x(0)) + c\,X(p) = S(p)$$

$$\left(a\,p^2 + b\,p + c\right) X(p) = (a\,p + b)\,x(0) + a\,x'(0) + S(p) \;\Rightarrow\; X(p) = \frac{(a\,p+b)\,x(0) + a\,x'(0)}{a\,p^2 + b\,p + c} + \frac{1}{a\,p^2 + b\,p + c} S(p)$$

- $\dfrac{(a\,p+b)\,x(0) + a\,x'(0)}{a\,p^2 + b\,p + c}$ est la transformée de Laplace de $y(t)$, la solution générale de l'équation sans second membre.
- $\dfrac{1}{a\,p^2 + b\,p + c}$ est la transformée de Laplace d'une certaine fonction g.

- $\dfrac{1}{a\,p^2 + b\,p + c} S(p)$ c'est $\mathcal{L}(g * s)$ et $x = y + g * s \Rightarrow \boxed{x(t) = y(t) + \int_0^t s(u) g(t-u) du}$

4. Équations de Volterra

– de première espèce : $\boxed{\int_0^t x(u) k(t-u) du = s(t)} \iff x * k = s \iff X = \dfrac{S}{K}$

– de deuxième espèce : $\boxed{x(t) + \int_0^t x(u) k(t-u) du = s(t)} \iff x + x * k = s \iff X = \dfrac{S}{1+K}$

Chapitre 6 – Transformée de Fourier (*début*)

1 La transformée de Fourier

1. Si f est une fonction à valeurs réelles, ou complexes, d'une variable réelle x, sa *transformée de Fourier*, notée aussi $\mathcal{F}(f)$, est la fonction $\widehat{f}$ donnée par (ici, y est une variable réelle) :

$$\boxed{\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi\, i\, x\, y} dx}$$

Nota : Dans tout ce qui suit, f sera de classe C^0 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \cos(2\pi\, x\, y) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \sin(2\pi\, x\, y) dx}$$

f paire

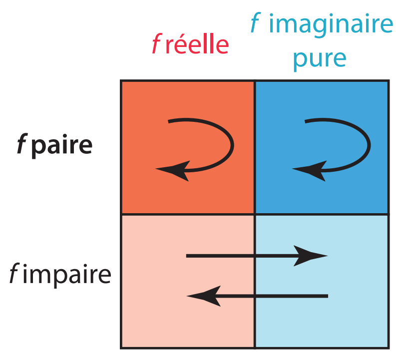
$$\Downarrow$$

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \cos(2\pi\, x\, y) dx$$

f impaire

$$\Downarrow$$

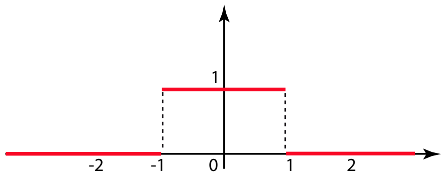
$$\widehat{f}(y) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \sin(2\pi\, x\, y) dx$$

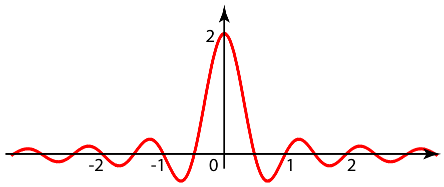


2. **Exemple** :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{quand } |x| < 1 \\ 0 & \text{quand } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\widehat{f}(y) = \frac{2\sin(2\pi y)}{2\pi y}$$





$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\cos(2\pi xy)dx = \int_{-1}^{+1} \cos(2\pi xy)dx = \left[\frac{\sin(2\pi xy)}{2\pi y}\right]_{x=-1}^{x=+1} = \left[\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi y} - \frac{\sin(-2\pi x)}{2\pi y}\right] = \frac{2\sin(2\pi y)}{2\pi y}$$

3. **Q1** : Quelles fonctions ont une transformée de Fourier ?

Q2 : Comment reconnaître une transformée de Fourier ?

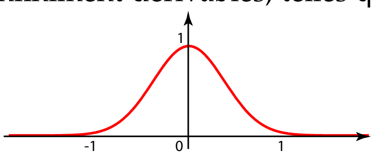
Q3 : Comment retrouver f à partir de $\widehat{f}$?

R1 Les fonctions utiles qui ont une transformée de Fourier sont les fonctions f de classe C^0 par morceaux telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\,f(x)\,|dx$ existe, et parmi elles, il y a deux ensembles importants.

a. Les fonctions C^0 par morceaux à *support compact* : ce sont les fonctions f pour qui il existe un nombre T tel que $f(x) = 0$ quand $|\,x\,| > T$. Par exemple la *fonction créneau* dont on a calculé la transformée de Fourier.

b. Les fonctions C^∞ à *décroissance rapide* : ce sont les fonctions f infiniment dérivables, telles que, quel que soit p et quel que soit k, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |\,x^k\, f^{(p)}(y)| = 0$.

Exemple : $f(x) = e^{-\pi x^2}$ est une fonction à décroissance rapide. Sa courbe représentative s'appelle la *courbe en cloche*.



Théorème :
a. Si f est à décroissance rapide, il en est de même de $\widehat{f}$.
b. Toute fonction à décroissance rapide est la transformée de Fourier d'une et d'une seule fonction à décroissance rapide.

R2 Si f est de classe C^0 par morceaux et si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\,f(x)\,|dx$ existe, on démontre que $\widehat{f}$ est continue, et que $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \widehat{f}(y) = 0$.

2 Opérations sur les transformées de Fourier

1. **Linéarité** $\boxed{\mathcal{F}(a_1 f_1 + \cdots + a_p f_p) = a_1 \mathcal{F}(f_1) + \cdots + a_p \mathcal{F}(f_p)}$

2. **Homothétie** : Si v est un nombre réel non nul : $\boxed{f_v(x) = f(vx) \quad\Rightarrow\quad \widehat{f_v}(y) = \frac{1}{|\,v\,|}\widehat{f}\left(\frac{y}{v}\right)}$

$$\widehat{f_v}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v\,x)\,e^{-2\pi i\,xy}dx \overset{x\to u/v}{=} \int_{-\infty v}^{+\infty v} f(u)\,e^{-2\pi i\,u\frac{y}{v}}\frac{du}{v}$$