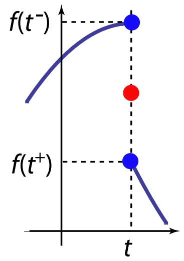
Chapitre 4 – Séries trigonométriques (suite)

3 Série de Fourier d'une fonction périodique

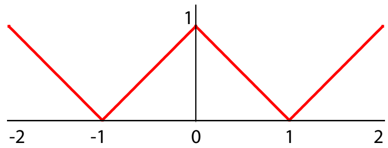
Théorème de Dirichlet
Si f est une fonction périodique de *classe* C^1 par morceaux :

$$\boxed{S(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}}$$



En particulier, $S(t) = f(t)$ *quand* f *est continue au point* t.

Exemple : La fonction $f(t)$:



a pour période $T = 2$,

donc $\omega = \pi$; elle est paire, donc $b_n = 0$; elle vaut $(1-t)$ quand $0 \leqslant t \leqslant 1$, d'où :

$$a_0 = \frac{1}{2} \qquad\qquad a_n = \frac{4}{2}\int_0^1 (1-t)\cos(n\,\pi\,t)dt = 2\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right)$$

$$a_n = 2\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right) \quad\Rightarrow\quad a_{2p} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{2p+1} = \frac{4}{\pi^2\,(2p+1)^2}$$

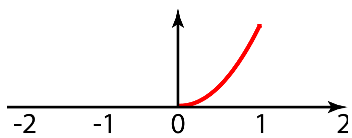
Série de Fourier : $$S(t) = \frac{1}{2} + \frac{4\cos\pi\,t}{\pi^2\,1} + \frac{4\cos 3\pi\,t}{\pi^2\,9} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)\pi\,t}{(2p+1)^2}\right)$$

La fonction est continue ; donc Dirichlet $\Rightarrow$ $S(t) = f(t)$ *quel que soit* $t \in \mathbb{R}$.

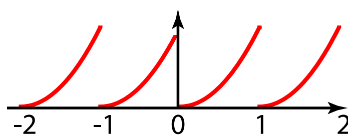
$$f(0) = 1 \quad\Rightarrow\quad S(0) = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\right) = 1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}}$$

Développement d'une fonction en série trigonométrique
1. On part d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 (pas forcément périodique).
Exemple : $f(t) = t^2$
2. On se donne un nombre $T > 0$. ($T = 1$)
3. On fabrique une fonction F en déclarant :

$F(t) = f(t)$ quand $0 < t < T$



F est périodique de période T



3. La fonction F est de classe C^1 par morceaux. On calcule ses coefficients de Fourier :

$$a_n = 2\int_0^1 t^2\cos(2\pi n t)\,dt = \frac{1}{n^2\pi^2} \qquad a_0 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \qquad b_n = 2\int_0^1 t^2\sin(2\pi n t)\,dt = \frac{-1}{n\,\pi}$$

et sa série de Fourier : $\displaystyle \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi n t)}{n^2\pi^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi n t)}{n\,\pi}$

4. Dans l'intervalle $]0, T[$ la fonction F est continue, donc égale à la somme de sa série de Fourier (*théorème de Dirichlet*).

5. Comme $F(t) = f(t)$ sur cet intervalle, *la somme de la série de Fourier de F est $f(t)$ quand* $0 < t < T$.

On dit que f a été *développée en série trigonométrique*.

$$\boxed{t^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi n t)}{n^2\pi^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi n t)}{n\,\pi} \quad \text{quand } \ 0 < t < 1}$$

6. $\left\{\begin{array}{l} F(0^+) = f(0) \\ F(0^-) = f(1) \end{array}\right\} \overset{\text{Dirichlet}}{\Rightarrow}$ Quand $t = 0$, la série de Fourier de F a pour somme $\dfrac{f(0)+f(T)}{2}$

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi n t)}{n^2\pi^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi n t)}{n\,\pi} \quad \xrightarrow{t\to 0} \quad \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}$$

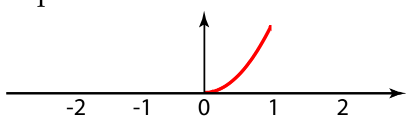
$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Développement en série de cosinus

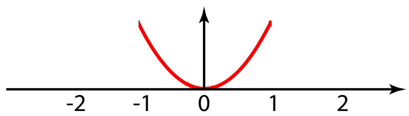
1. On part d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1. *Exemple : $f(t) = t^2$*

2. On se donne un nombre $T > 0$, $(T = 2)$, puis on fabrique une fonction F de classe C^1 par morceaux, *paire*, périodique de période T, en posant :

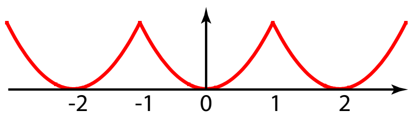
$F(t) = f(t)$ quand $0 < t < \dfrac{T}{2}$



en utilisant la *parité*



et la *périodicité* pour les autres valeurs



3. La série de Fourier de F ne contient que des cosinus et le th. de Dirichlet dit que sa somme est $f(t)$ sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{T}{2}\right[$ $\quad a_0 = \dfrac{2}{2}\displaystyle\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \qquad a_n = \frac{4}{2}\int_0^1 t^2\cos(n\pi t)dt = \frac{4(-1)^n}{n\,\pi^2}$

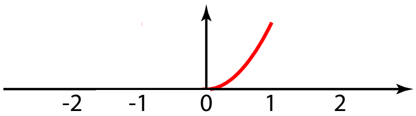
$$\boxed{t^2 = \frac{1}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(\pi\, n\, t)}{n\,\pi^2} \quad \text{quand } \ 0 < t < 1}$$

Développement en série de sinus

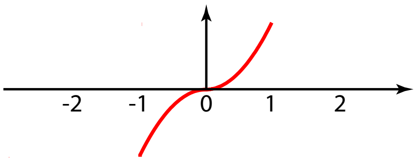
1. On part d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1. *Exemple :* $f(t) = t^2$

2. On se donne un nombre $T > 0$, $(T = 2)$, puis on fabrique une fonction F de classe C^1 par morceaux, *impaire*, périodique de période T, en posant :

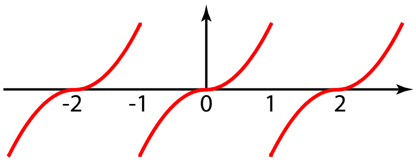
$F(t) = f(t)$ quand $0 < t < \frac{T}{2}$



en utilisant l'*imparité*



et la *périodicité* pour les autres valeurs



3. La série de Fourier de F ne contient que des sinus et le théorème de Dirichlet dit que sa somme est $f(t)$ sur l'intervalle $\left]0, \frac{T}{2}\right[$ $\quad b_n = \frac{4}{2}\int_0^1 t^2 \sin(n\,\pi t)dt = \frac{4}{n^3\,\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right] - \frac{2(-1)^n}{n\,\pi}$

$$\boxed{t^2 = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin(\pi\, n\, t)}{n\,\pi} - 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\pi\,(2n+1)\,t)}{(2n+1)^3\pi^3} \quad \text{quand } \ 0 < t < 1}$$

4 Opérations sur les séries de Fourier

Somme

- $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont des fonctions périodiques de période T,
- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des constantes.

$$\boxed{\begin{aligned} c_n(\alpha_1\, f_1 + \cdots + \alpha_p\, f_p) &= \alpha_1\, c_n(f_1) + \cdots + \alpha_p c_n(f_p) \\ a_n(\alpha_1\, f_1 + \cdots + \alpha_p\, f_p) &= \alpha_1\, a_n(f_1) + \cdots + \alpha_p a_n(f_p) \\ b_n(\alpha_1\, f_1 + \cdots + \alpha_p\, f_p) &= \alpha_1\, b_n(f_1) + \cdots + \alpha_p b_n(f_p) \end{aligned}}$$

Translation

- a est un nombre réel quelconque
- $f_a(t) = f(t+a)$

$\Bigg\} \Rightarrow \boxed{c_n(f_a) = e^{i\,n\,\omega\,a}c_n(f)}$

$$c_n(f_a) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t+a)e^{-i\,n\,\omega\,t}dt \overset{t+a\to u}{=} \frac{1}{T}\int_{-a}^{-a+T} f(u)e^{-i\,n\,\omega\,(u-a)}du = \frac{1}{T}\int_{-a}^{-a+T} f(u)e^{-i\,n\,\omega\,u}e^{i\,n\,\omega\,a}du$$

$$= e^{i\,n\,\omega\,a}\frac{1}{T}\int_{-a}^{-a+T} f(u)e^{-i\,n\,\omega\,u}du = e^{i\,n\,\omega\,a}c_n(f)$$

$$\begin{array}{c} f \\ \Downarrow \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\,n\,\omega\,t} \end{array} \qquad \begin{array}{c} f_a \\ \Downarrow \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\,n\,\omega\,a} e^{i\,n\,\omega\,t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\,n\,\omega\,(t+a)} \end{array}$$

La série de Fourier de la translatée est la translatée de la série de Fourier

Pour la série de Fourier réelle : $f_a \Rightarrow a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\big(n\,\omega\,(t+a)\big) + \sin\big(n\,\omega\,(t+a)\big)$

Dérivée $\boxed{c_n(f') = i\,n\,\omega\,c_n(f)}$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-i\,n\,\omega\,t}dt = \frac{1}{T}[f(t)e^{-i\,n\,\omega\,t}]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(-i\,n\,\omega\,e^{-i\,n\,\omega\,t})dt = 0 + i\,n\,\omega\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\,n\,\omega\,t}dt\right)$$

$$\begin{array}{c} f \\ \Downarrow \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\,n\,\omega\,t} \end{array} \qquad \begin{array}{c} f' \\ \Downarrow \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\,n\,\omega c_n e^{i\,n\,\omega\,t} \end{array}$$

La série de Fourier de la dérivée est la dérivée de la série de Fourier

Primitive

- f fonction ayant une valeur moyenne nulle.
- F primitive de f ayant une valeur moyenne nulle.

$$\boxed{c_n(F) = \frac{c_n(f)}{i\,n\,\omega}}$$

La série de Fourier de la primitive s'obtient en intégrant la série de Fourier de la fonction

Produit de convolution

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions périodique de période T, le *produit de convolution* de f_1 par f_2 est la fonction $h = f_1 * f_2$, définie par :

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(u)f_2(t-u)du}$$

- Si f_1 et f_2 sont de classe C^0 (ou C^1) par morceaux, $f_1 * f_2$ est de classe C^0 (ou C^1) par morceaux.
- $f_1 * f_2$ est périodique de période T.

$$\boxed{f_1 * f_2 = f_2 * f_1} \qquad \boxed{(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)} \qquad \boxed{c_n(f_1 * f_2) = c_n(f_1)\,c_n(f_2)}$$

5 Formule de Bessel-Parseval

Dans de nombreux *phénomènes physiques* mettant en jeu des *fonctions périodiques*, une *puissance* est représentée par le nombre :

$$\boxed{\mathcal{P}(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt}$$

On calcule (sans justifier les calculs) $\mathcal{P}(f)$, en supposant que $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,e^{i\,n\,\omega\,t}$.

$$f(t)^2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,e^{i\,n\,\omega\,t}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\,e^{i\,m\,\omega\,t}\right) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} c_n\,c_m\,e^{i\,(n+m)\,\omega\,t} = \sum_{N=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n+m=N} c_n\,c_m\right)e^{i\,N\,\omega\,t}$$

$$\mathcal{P}(f) = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{N=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n+m=N} c_n\, c_m\right)e^{iN\omega t}\right)dt = \sum_{N=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n+m=N} c_n\, c_m\right)\frac{1}{T}\int_0^T e^{iN\omega t}dt$$

$$= \sum_{n+m=0} c_n\, c_m = \sum_n c_n\, c_{-n} = \sum_n c_n\, \overline{c_n} = \sum_n |c_n|^2$$

D'où la formule de *Bessel-Parseval* :

$$\boxed{\mathcal{P}(f) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2}$$

$$|c_n| = |c_{-n}| \;\Rightarrow\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \qquad c_n\,\overline{c_n} = \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(f) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2}$$

Conséquence : Si f est la somme de sa série de Fourier, les séries $|c_n|^2$, a_n^2, b_n^2, A_n^2 convergent, donc leur terme général tend vers 0, donc c_n, a_n, b_n, A_n tendent vers 0.

Pour aller plus loin . . .
Si f et g sont deux fonctions périodiques de période T qui ont une « puissance », on pose :

$$\boxed{< f, g >= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}dt}$$

C'est une « sorte de produit scalaire » dans lequel $\mathcal{P}(f) =< f, f >$ joue le rôle du « carré scalaire ». On dit que f et g sont *orthogonales* quand $< f, g >= 0$.

Pour la *série de Fourier complexe* :

Théorème : Soient $f(t) = e^{in\omega t}$ et $g(t) = e^{im\omega t}$.

- les fonctions f et g sont orthogonales quand $n \neq m$.
- $< f, f >= 1$.

Écrire $f(t)$ comme somme d'une série trigonométrique complexe, c'est écrire $f(t)$ dans une « sorte de base » orthonormée.

Pour la *série de Fourier réelle* :

Théorème : Soient $s_n(t) = \sin(n\,\omega\,t)$ et $c_m(t) = \cos(m\,\omega\,t)$.

- les fonctions s_n et c_m sont toujours orthogonales.
- les fonctions s_n et s_m sont orthogonales quand $n \neq m$.
- les fonctions c_n et c_m sont orthogonales quand $n \neq m$.

Écrire $f(t)$ comme somme d'une série trigonométrique réelle, c'est écrire $f(t)$ dans une autre sorte de base (« ortho »mais pas « normée »).