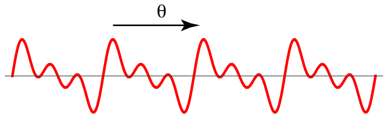
Chapitre 4 – Séries trigonométriques

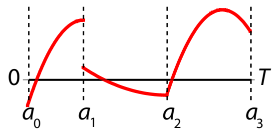
1 Fonctions périodiques

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Le nombre θ est une *période* de f si $f(t+\theta) = f(t)$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. Quand f admet une période non nulle, on dit qu'elle est *périodique*.



Théorème : Soit f *périodique* et *continue*. Ou bien $f = Cte$, ou bien il existe une plus petite période $T > 0$ et toutes les périodes de f sont les nombres de la forme $\theta = kT$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ce nombre T s'appelle *la période* de f.
Soient f une fonction périodique et T sa période. On dit que f est *de classe C^n par morceaux* s'il existe des points : $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = T$ tels que :

- sur chacun des intervalles ouverts $]a_{i-1}, a_i[$ les dérivées $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ existent, sont continues, et, quel que soit k :
- $\lim\limits_{t \to a_i^+} f^{(k)}(t)$ existe quand $0 \leqslant i < s$,
- $\lim\limits_{t \to a_i^-} f^{(k)}(t)$ existe quand $0 < i \leqslant s$.



Remarque : Les nombres $f(a_i)$ sont définis, ou pas, cela n'a aucune d'importance.
Remarque : Si f est de classe C^n par morceaux, elle est de classe C^k pour tout $k \leqslant n$.
Une fonction de classe C^0 par morceaux est une fonction *continue par morceaux*. Une telle fonction est *intégrable* sur tout intervalle borné.
Théorème : Soient f une fonction périodique continue par morceaux, θ une de ses périodes non nulle, et a un nombre réel quelconque. Alors le nombre :

$$\boxed{\mu(f) = \frac{1}{\theta} \int_a^{a+\theta} f(t)dt}$$

ne dépend pas du choix de θ et a ; c'est la *la valeur moyenne de $f(t)$*.
Cas particulier : Si f est *impaire*, sa valeur moyenne est nulle.
Théorème : Pour que les primitives d'une fonction périodique soient périodiques, il faut et il suffit que la valeur moyenne de cette fonction soit nulle.
Théorème Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ont θ pour période commune, et si $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des constantes quelconques, la fonction $f = C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_n f_n$ admet θ pour période et :

$$\boxed{\mu(f) = C_1\mu(f_1) + C_2\mu(f_2) + \cdots + C_n\mu(f_n)}$$

2 Séries trigonométriques

Soit $T > 0$. On s'intéresse aux fonctions admettant T pour période. On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et on appelle ce nombre la *pulsation*. Un *polynôme trigonométrique* est une fonction de la forme :

$$\boxed{f(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + \cdots + a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)}$$

Une *série trigonométrique* est une série de la forme :

$$\boxed{a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + \cdots + a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) + \cdots}$$

Les fonctions : $\boxed{H_k(t) = a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)}$ sont les *harmoniques* de la série ;
le premier harmonique s'appelle le *fondamental*. Quand a_k et b_k ne sont pas tous les deux nuls, on écrit aussi : $\boxed{H_k(t) = A_k\cos(k\omega t + \varphi_k)}$

$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ (l'*amplitude*) $\quad \cos(\varphi_k) = \dfrac{a_k}{A_k} \quad \sin(\varphi_k) = \dfrac{-b_k}{A_k}$ (φ_k la *phase*) $\quad \dfrac{k}{T}$ la *fréquence*

et la série devient : $\boxed{A_0 + A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + \cdots + A_n\cos(n\omega t + \varphi_n) + \cdots}$

Formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\begin{aligned}
a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n\frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}\Big) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\Big)e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\Big)e^{-in\omega t} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a_n - ib_n}{2}\Big)e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a_n + ib_n}{2}\Big)e^{-in\omega t}
\end{aligned}$$

Finalement, la série trigonométrique prend la *forme complexe* :

$$\boxed{\cdots + c_{-2}e^{-2i\omega t} + c_{-1}e^{-i\omega t} + c_0 + c_1e^{i\omega t} + c_2e^{2i\omega t} + \cdots}$$

avec : $\quad c_0 = a_0 \quad$ et $\quad \boxed{c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} \qquad c_{-n} = \overline{c_n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2} \qquad (n > 0)}$

On repasse à la forme réelle $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big)$ en posant, quand $n > 0$:

$$\boxed{a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})}$$

Selon les besoins, les séries trigonométriques peuvent s'écrire de 3 façons différentes :

$$\text{réelle :} \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big)$$

$$\text{harmonique :} \quad A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$\text{complexe :} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{i\,n\,\omega t}$$

Les questions fondamentales

Q1 Quel est le domaine de convergence d'une série trigonométrique ?

Q2 Quelles propriétés possède la somme d'une série trigonométrique ?

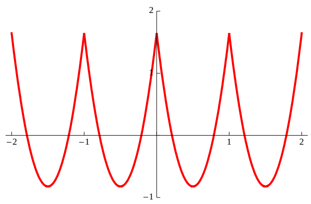
Q3 Les fonctions ayant ces propriétés sont-elles somme d'une série trigonométrique ? Si oui, de laquelle ?

La somme d'une série trigonométrique est périodique de période T.

Q3bis Parmi les fonctions périodiques de période T, lesquelles sont la somme d'une série trigonométrique, et de quelle série ?
Il n'y a pas de condition nécéssaire et suffisante pour qu'une série trigonométrique converge. Mais il y a deux conditions *suffisantes* classiques.

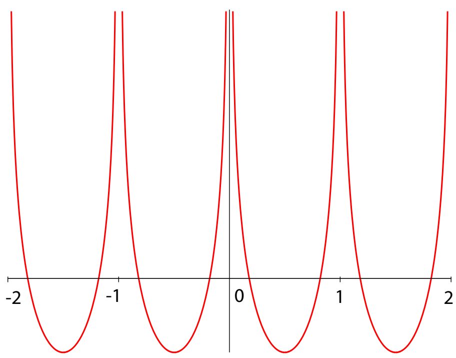
Théorème 1 : Si les séries $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ convergent, la série trigonométrique converge normalement, donc uniformément, et sa somme est continue.

Exemple : $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n^2}$ est une fonction continue de t de période 1.



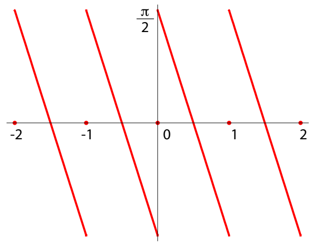
Théorème 2 : Si a_n est une suite de nombres positifs qui décroissent et qui tendent vers 0, la série trigonométrique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$ converge uniformément sur tout intervalle contenu dans $]0, T[$ et sa somme est continue sur $]0, T[$.

Exemple 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n}$ $\omega = 2\pi \quad T = 1$



Théorème 2bis : Si b_n est une suite de nombres positifs qui décroissent et qui tendent vers 0, la série trigonométrique $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$ converge pour tout t. La convergence est uniforme sur tout intervalle contenu dans $]0, T[$ et sa somme est continue sur $]0, T[$.

Exemple 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n}$ $\omega = 2\pi \quad T = 1$



3 Série de Fourier d'une fonction périodique

Problème : On a une fonction périodique et on sait qu'elle est la somme d'une série trigonométrique convergente du type :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,\omega t) + b_n \sin(n\,\omega t)$$

Comment retrouver les coefficients a_n et b_n ?
Idée : La valeur moyenne de chacune des fonctions $a_n \cos(n\,\omega t)$ et $b_n \sin(n\,\omega t)$ est nulle :

$$\int_0^T \cos(n\,\omega t)dt = \left[\frac{\sin(n\,\omega t)}{n\,\omega}\right]_0^T = \frac{0-0}{n\,\omega} = 0 \qquad \int_0^T \sin(n\,\omega t)dt = \left[\frac{-\cos(n\,\omega t)}{n\,\omega}\right]_0^T = \frac{0-0}{n\,\omega} = 0$$

donc $\mu\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,\omega t) + b_n \sin(n\,\omega t)\right) = \mu\,(a_0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt}$

Théorème : $\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\,n\,\omega t}dt = \begin{cases} 1 & \text{quand } n = 0 \\ 0 & \text{quand } n \neq 0 \end{cases}}$

$$n \neq 0 \quad \int_0^T e^{i\,n\,\omega t}dt = \left[\frac{e^{i\,n\,\omega t}}{i\,n\,\omega}\right]_0^T = \frac{1-1}{i\,n\,\omega} = 0 \qquad n = 0 \quad \frac{1}{T}\int_0^T dt = \frac{T-0}{T} = 1$$

Théorème : $\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)e^{-i\,n\,\omega t}dt}$

$$S(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p e^{i\,p\,\omega t} \Rightarrow S(t)e^{-i\,n\,\omega t} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p e^{i\,(p-n)\,\omega t} \Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T S(t)e^{-i\,n\,\omega t}dt = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\,(p-n)\,\omega t}dt\right) = c_p$$

Théorème : $\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos(n\,\omega t)dt} \qquad \boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin(n\,\omega t)dt}$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)(e^{i\,n\,\omega t} + e^{-i\,n\,\omega t})dt \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{T}\int_0^T S(t)(e^{i\,n\,\omega t} - e^{-i\,n\,\omega t})dt$$

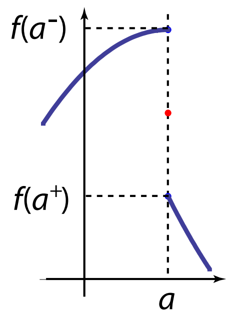
La série trigonométrique $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,\omega t) + b_n \sin(n\,\omega t)$ construite avec ces coefficients s'appelle la série de Fourier (réelle) de la fonction. La série trigonométrique $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p e^{i\,p\,\omega t}$ est sa série de Fourier (complexe).

• Si la fonction est paire, tous les b_n sont nuls, $a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} S(t)dt$ et $a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} S(t)\cos(n\,\omega t)dt$ quand $n > 0$.

• Si la fonction est impaire, tous les a_n sont nuls et $b_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} S(t)\sin(n\,\omega t)dt$

Question : *Une fonction périodique qui admet une série de Fourier, est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?*

Notations : $f(a^+) = \lim\limits_{t\to a^+} f(t)$ et $f(a^-) = \lim\limits_{t\to a^-} f(t)$. f est continue en $a \iff f(a^+) = f(a^-) = f(a)$

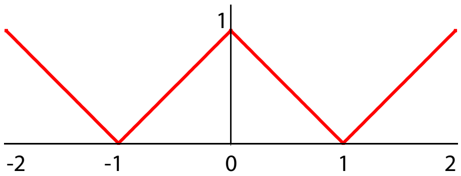


Théorème de Dirichlet
Si f est une fonction périodique de *classe* C^1 par morceaux :

$$\boxed{S(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}}$$

En particulier, $S(t) = f(t)$ *quand f est continue au point t*.

Exemple La fonction $f(t)$:



• est périodique de période $T = 2 \quad\Rightarrow\quad \omega = \pi$.

• est paire $\quad\Rightarrow\quad b_n = 0$

• vaut $1 - t$ quand $0 \leqslant t \leqslant 1 \quad\Rightarrow$

$$a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_n = \frac{4}{2}\int_0^1 (1-t)\cos(n\,\pi\,t)dt = 2\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right)$$

$$a_n = 2\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right) \quad\Rightarrow\quad a_{2p} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{2p+1} = \frac{4}{\pi^2\,(2p+1)^2}$$

Série de Fourier : $S(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4\cos\pi\,t}{\pi^2 1} + \dfrac{4\cos 3\pi\,t}{\pi^2 9} + \cdots = \boxed{\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)\pi\,t}{(2p+1)^2}\right)}$

Dirichlet $\Rightarrow$ $S(t) = f(t)$ *quel que soit $t \in \mathbb{R}$*.

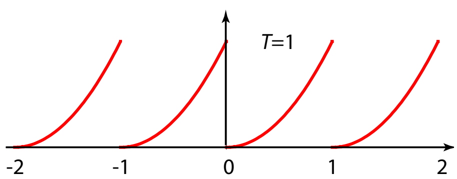
$$f(0) = 1 \quad\Rightarrow\quad S(0) = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\right) = 1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}}$$

Développement d'une fonction en série trigonométrique

1. On part d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, pas forcément périodique, de classe C^1.

2. On se donne un nombre $T > 0$, puis on fabrique une fonction F de classe C^1 par morceaux, périodique de période T, en posant : $F(t) = f(t)$ quand $0 < t < T$ et en utilisant la périodicité pour les autres valeurs.

Exemple : $f(t) = t^2 \quad T = 1$



3. Le théorème de Dirichlet dit que la somme de la série de Fourier de F est égale à $f(t)$ quand $0 < t < T$.

Exemple : $f(t) = t^2 \quad T = 1 \quad a_n = 2\int_0^1 t^2 \cos 2\pi nt dt = \dfrac{1}{n^2\pi^2} \qquad a_0 = \int_0^1 t^2 dt = \dfrac{1}{3}$

$b_n = 2\int_0^1 t^2 \sin 2\pi nt dt = \dfrac{-1}{n\pi} \qquad \boxed{S(t) = \dfrac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2\pi nt}{n^2\pi^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2\pi nt}{n\pi}}$

$\boxed{0 < t < 1} \quad S(t) = F(t) \Rightarrow \dfrac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2\pi nt}{n^2\pi^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2\pi nt}{n\pi} = t^2$

$\boxed{t = 0} \qquad S(0) = \dfrac{F(0^+) + F(0^-)}{2} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2\pi^2} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}}$

Développement en série de sinus

1. On part d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$,de classe C^1.

2. On se donne un nombre $T > 0$, puis on fabrique une fonction F de classe C^1 par morceaux, *impaire*, périodique de période T, en posant : $F(t) = f(t) \quad$ quand $\; 0 < t < \dfrac{T}{2}$ et en utilisant la périodicité pour les autres valeurs.

3. La série de Fourier de F ne contient que des sinus et le théorème de Dirichlet dit que sa somme est $f(t)$ sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{T}{2}\right[$.

Développement en série de cosinus

1. On part d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$,de classe C^1.

2. On se donne un nombre $T > 0$, puis on fabrique une fonction F de classe C^1 par morceaux, *paire*, périodique de période T, en posant : $F(t) = f(t) \quad$ quand $\; 0 < t < \dfrac{T}{2}$ et en utilisant la périodicité pour les autres valeurs.

3. La série de Fourier de F ne contient que des cosinus et le théorème de Dirichlet dit que sa somme est $f(t)$ sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{T}{2}\right[$.