Chapitre 3 – Séries entières

1 Somme d'une série entière

Une *série entière* est une série de la forme : $a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$, avec $z, a_0, a_1, a_2, \ldots$ des nombres réels ou complexes. Les nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont les *coefficients* de la série et z est la *variable*.

Quand z est complexe, $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une *fonction complexe d'une variable complexe*.

Les séries entières généralisent donc les polynômes.

Le domaine de convergence est l'ensemble des z pour lesquels la série entière converge.

Lemme d'Abel

Soit $\alpha \neq 0$. Si $a_n\,\alpha^n$ est borné quand n tend vers l'infini, la série entière converge absolument quel que soit z avec $|\,z\,| < |\,\alpha\,|$.

Démonstration

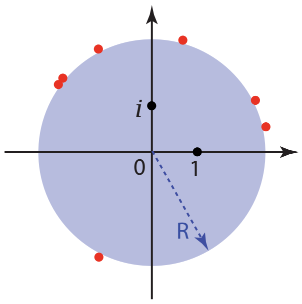
$$|\,a_n\,z^n\,| = |\,a_n\,\alpha^n\,|\left|\frac{z}{\alpha}\right|^n$$

$$|\,a_n\,\alpha^n\,| \leqslant M \;\Rightarrow\; |\,a_n\,z^n\,| \leqslant M\left|\frac{z}{\alpha}\right|^n$$

Si $|\,z\,| < |\,\alpha\,|$ la série $|\,a_n\,z^n\,|$ est majorée par la série géométrique de terme général $M\left|\frac{z}{\alpha}\right|^n$ qui converge. Donc la série entière est absolument convergente, donc convergente.

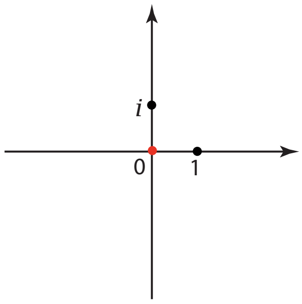
On arrive à un domaine de taille maximale et 3 cas sont possibles :

1. La série entière converge pour tous les points situés à l'intérieur d'un disque de rayon R plus éventuellement en des points placés sur le bord du disque.
R est le *rayon de convergence* de la série et l'intérieur du disque s'appelle le *disque de convergence*.
Exemple : $1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \qquad R=1$



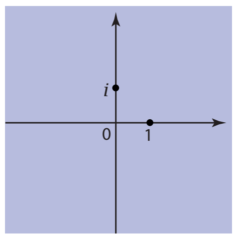
2. La série entière converge uniquement lorsque $z = 0$; dans ce cas $R = 0$ et le disque de convergence est vide.

Exemple : $1+1!\,z+2!\,z^2+\cdots+n\,!\,z^n+\cdots$



3. La série entière converge dans tout le plan complexe. Alors $R = \infty$ et le disque de convergence est tout le plan complexe.

Exemple : $1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n\,!}+\cdots$



Théorème 1

- $|z| < R \quad \Rightarrow \quad$ la série converge $\quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n z^n| = 0$
- $|z| > R \quad \Rightarrow \quad |a_n z^n|$ n'est pas borné $\quad \Rightarrow \quad$ la série diverge.

Théorème 2

- La série converge $\quad \Rightarrow \quad |z| \leqslant R$.
- La série diverge $\quad \Rightarrow \quad |z| \geqslant R$.

Application de la règle de d'Alembert $\quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{L}$

avec $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$

Démonstration Soit $u_n = |a_n z^n|$ alors $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}\, z^{n+1}}{a_n\, z^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} z \right| = Lz$

$L|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad$ convergence et $\quad L|z| > 1 \quad \Rightarrow \quad$ divergence.

Application de la règle de Cauchy $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{L}$

Remarque $1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots + z^{2n} + \cdots$ n'a pas de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ et pas de $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ mais $R = 1$.

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}$$

2 Opérations sur les séries entières

On part de deux séries entières : $\quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad [R_1] \qquad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad [R_2]$.

- **Somme** $\quad S(z) + T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, z^n \qquad [R_3 \geqslant \inf(R_1, R_2)]$
- **Produit** $\quad S(z)\,T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n \quad \boxed{c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}} \qquad [R_4 \geqslant \inf(R_1, R_2)]$
- **Quotient** $\quad b_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{S(z)}{T(z)} \qquad [R_5 \neq 0]$

On calcule les coefficients en faisant une *division selon les puissances croissantes*.

$$
\begin{array}{ccccccc|ccccc}
a_0 & + & a_1\, z & + & a_2\, z^2 & + \cdots & & 1 & + & b_1\, z & + \cdots \\
\cline{8-12}
a_0 & + & a_0 b_1\, z & + & a_0 b_2\, z^2 & + \cdots & & a_0 & & & \\
\cline{1-6}
 & & (a_1 - a_0 b_1)\, z & + & (a_2 - a_0 b_2)\, z^2 & + \cdots & & & & &
\end{array}
$$

- **Composée** $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $[R_1 \neq 0]$ $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ $[R_2 \neq 0]$

$$b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad S(T(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T(z)^n \quad [R_6 \neq 0]$$

Cas particulier $T(z) = b\,z^r \quad \Rightarrow \quad \boxed{S(b\,z^r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n z^{nr}}$

Exemple

$$\frac{1}{1 - b\,z^r} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{nr} = 1 + b\,z^r + b^2 z^{2r} + \cdots$$

3 Propriétés des sommes de séries entières

Théorème : $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue, dérivable et $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n\,z^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n\,z^n$ ont le même rayon de convergence.

Théorème : $S(z)$ est indéfiniment dérivable et :

$$\boxed{S^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+k)\,a_n\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!}\,a_n\,z^n}$$

$$\boxed{\frac{S^{(k)}(z)}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!}\,a_n\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^{k}\,a_n\,z^n} \qquad \boxed{\frac{S^{(k)}(0)}{k!} = a_k}$$

Exemple

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n+1)z^n + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = 1 + 3z + 6z^2 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n + \cdots$$

$$\boxed{\frac{1}{(1-z)^k} = 1 + kz + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{(k-1)!} z^n + \cdots}$$

$k \geqslant 2$

Théorème $\boxed{C + a_0\,z + \frac{a_1}{2} z^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} z^n + \cdots}$ avec C une constante quelconque, est une primitive de $S(z)$. Son rayon de convergence est le même que celui de $S(z)$.

4 Développement en série entière

Soit $f(z)$ une fonction complexe de la variable complexe z et soit z_0 un nombre complexe. On dit que $f(z)$ est *développable en série entière au voisinage de* z_0 quand il existe une série entière ayant un rayon de convergence non nul, telle que, quel que soit z dans le disque de convergence de la série :

$$\boxed{f(z_0+z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$$

Théorème Si $f(z)$ est développable en série entière au voisinage de z_0 , elle est infiniment dérivable dans un disque centré en z_0 et :

$$\boxed{f(z_0+z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{k!}\, z^n}$$

Cette série entière s'appelle la *série de Taylor* au point z_0 .

Théorème Si f est une *fonction complexe d'une variable complexe*, il suffit qu'elle soit dérivable 1 fois en tout point d'un disque ouvert pour qu'elle soit développable en série entière au voisinage de tout point de ce disque.

Conséquence La condition *nécessaire et suffisante* pour qu'une fonction complexe d'une variable complexe soit développable en série entière au voisinage de tout point d'un disque est qu'elle soit dérivable 1 fois en tout point de ce disque.

Une telle fonction s'appelle une *fonction analytique*.

Exemple $\qquad f(z)=\dfrac{1}{1-z} \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\dfrac{1}{(1-z_0)^{n+1}}$

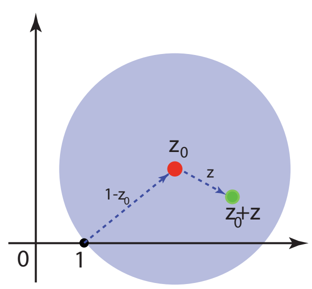
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{k!}\, z^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z_0)^{n+1}}=\frac{1}{(1-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-z_0}\right)^n$$

Quand $|z|<|1-z_0|$ la série géométrique converge et la somme de la série de Taylor est :

$$\frac{1}{(1-z_0)}\left(\frac{1}{1-\dfrac{z}{1-z_0}}\right)=\frac{1}{(1-z_0-z)}=f(z_0+z)$$

Donc, quel que soit $z_0\neq 1$, la fonction $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ est développable en série entière au voisinage de z_0 .

Remarque : La condition $|z|<|1-z_0|$ signifie que la série de Taylor admet $|1-z_0|$ pour rayon de convergence. La série de Taylor représente donc la fonction à l'intérieur du cercle centré en z_0, qui passe par 1.



Théorème Soit f une fonction réelle, infiniment dérivable dans un intervalle ouvert $\Im$. Pour que f soit développable en série entière au voisinage de $x_0\in\Im$, il faut et il suffit qu'il existe deux nombre A et B tels que $|f^{(n)}(x)|<A\,B^n$ quel que soit $n\geqslant 0$ et quel que soit x dans un intervalle ouvert centré en x_0 .

On utilise les théorèmes précédents pour fabriquer des fonctions complexes d'une variable complexe.

• On part d'une fonction réelle d'une variable réelle infiniment dérivable.

• On calcule ses dérivées.

• On écrit la série de Taylor.

• On l'utilise pour définir une fonction complexe d'une variable complexe.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} \qquad \sin z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \ln(1+z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}$$

$$\arctan z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{2p+1} \qquad (1+z)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{z^n}{n!}$$

5 Applications des séries entières

Il y en a beaucoup d'applications des séries entières, par exemple, elles permettent :

• de représenter toutes les fonctions complexes d'une variable complexe qui sont dérivables.

• d'exprimer les solutions de certaines équations différentielles par leur série de Taylor.

• d'exprimer les termes de suites vérifiant certaines relations de récurrence.

Exemple : Recherche des solutions de l'équation différentielle :

$$x\,y''(x) + y'(x) + x\,y(x) = 0$$

développables en série entière au voisinage de 0 :

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$\left\{\begin{array}{rcccccccc} x\,y(x) & = & & & a_0 x & + & \cdots & + & a_{n-1}x^n & + \cdots \\ y'(x) & = & a_1 & + & 2a_2 x & + & \cdots & + & (n+1)a_{n+1}x^n & + \cdots \\ x\,y''(x) & = & & & 2a_2 x & + & \cdots & + & (n+1)n a_{n+1}x^n & + \cdots \end{array}\right.$$

$$a_1 = 0 \qquad a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1} = 0 \quad (n \geqslant 1)$$

$$\begin{array}{rl||rl||} a_0 & & a_1 & = 0 \\ a_0 + 4a_2 & = 0 & a_1 + 9a_3 & = 0 \\ a_2 + 16a_4 & = 0 & a_3 + 25a_5 & = 0 \\ a_4 + 36a_6 & = 0 & a_5 + 49a_7 & = 0 \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{2p-2} + (2p)^2 a_{2p} & = 0 & a_{2p-1} + (2p+1)^2 a_{2p+1} & = 0 \end{array}$$

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times \ldots \times (2p)^2} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}(p!)^2} \qquad a_{2p+1} = 0 \qquad y(x) = a_0 \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{2^{2p}(p!)^2} \right)$$