Chapitre 8 – Systèmes linéaires

1 Introduction

1. Définition

Un système linéaire de p équations à n inconnues est un ensemble d'équations $[\mathcal{E}_1], [\mathcal{E}_2], \dots, [\mathcal{E}_p]$:

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{llllllllllll} \alpha_{1,1}\, X_1 & + & \alpha_{1,2}\, X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,n}\, X_n & = & \beta_1 & [\mathcal{E}_1] \\ \alpha_{2,1}\, X_1 & + & \alpha_{2,2}\, X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,n}\, X_n & = & \beta_2 & [\mathcal{E}_2] \\ \multicolumn{10}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha_{p,1}\, X_1 & + & \alpha_{p,2}\, X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{p,n}\, X_n & = & \beta_p & [\mathcal{E}_p] \end{array} \right.$$

dans lequel les $\alpha_{i,j}$ et les β_i sont des nombres *connus*, et $X_1, \dots, X_n$ des nombres *inconnus* qu'il s'agit de calculer. Les $\alpha_{i,j}$ sont les *coefficients* du système, et les β_i sont les *seconds membres*.

Une *solution* du système est un n-uple $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ qui vérifie *toutes* les équations du système.

2. Interprétation géométrique

• En 2D, une *ligne droite* est représentée par une équation du type : $ax + by = c$, d'où le nom d'*équation linéaire* pour ce genre d'équation.

L'intersection de deux droites du plan est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant un système du type :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a\,x + b\,y & = c \\ a'x + b'y & = c' \end{array} \right.$$

• En 3D, un *plan* est représenté par une équation du type : $ax + by + cz = d$.

▹ L'intersection de 2 plans est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y; z)$ vérifiant un système du type :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a\,x + b\,y + c\,z & = d \\ a'x + b'y + c'z & = d' \end{array} \right.$$

▹ L'intersection de 3 plans est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y; z)$ vérifiant un système du type :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a\,x + b\,y + c\,z & = d \\ a'x + b'y + c'z & = d' \\ a''x + b''y + c''z & = d'' \end{array} \right.$$

2 La méthode de Gauss

1. La *méthode de Gauss*, appelée aussi *méthode d'élimination* ou *méthode du pivot*, permet de trouver et de décrire l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Elle procède par étapes :

► Partant du *système initial*, noté $\mathcal{S}_0$, la méthode construit une suite de systèmes linéaires *auxiliaires*, $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots$, chacun plus simple que le précédent, qui ont les mêmes solutions que $\mathcal{S}_0$.

► Finalement, on arrive à un système tellement simplifié qu'on peut le résoudre sans calcul.

Il y a deux parties dans la méthode :

▹ la *transformation* du système, qui le simplifie,

▹ la résolution du *système terminal*, qu'on appelle la *discussion*.

2. Afin d'obtenir un système plus simple, le passage de $\mathcal{S}_{k-1}$ à $\mathcal{S}_k$ a pour objectif d'*éliminer le plus possible l'inconnue X_k* : on voudrait que X_k n'apparaisse plus que dans *une seule équation*.

$$\mathcal{S}_{k-1}\left\{\begin{array}{ccccc} \cdots & + & \alpha_{1,k}\ X_k & + \\ \cdots & + & \alpha_{2,k}\ X_k & + \\ . & . & . & . \\ \cdots & + & \alpha_{j,k}\ X_k & + \\ . & . & . & . \\ \cdots & + & \alpha_{p,k}\ X_k & + \end{array}\right. \qquad \mathcal{S}_{k}\left\{\begin{array}{ccccc} \cdots & + & 0 & + \\ \cdots & + & 0 & + \\ . & . & . & . \\ \cdots & + & \alpha_{j,k}\ X_k & + \\ . & . & . & . \\ \cdots & + & 0 & + \end{array}\right.$$

Pour cela, il suffit d'ajouter un multiple convenable de $[\mathcal{E}_j]$ à chacune des autres équations : à l'équation $[\mathcal{E}_i]$, on ajoute $-\dfrac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{j,k}}[\mathcal{E}_j]$.

3. Exemple

$$\mathcal{S}_0\left\{\begin{array}{rrrcr} 2\ X_1 & -\ 2\ X_2 & -\ 9\ X_3 & = & -\ 25 \\ 5\ X_1 & -\ 6\ X_2 & -\ 22\ X_3 & = & -\ 62 \\ X_1 & -\ 2\ X_2 & -\ 7\ X_3 & = & -\ 21 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} 2\ X_1 & -\ 2\ X_2 & -\ 9\ X_3 & = & -\ 25 \\ 5\ X_1 & -\ 6\ X_2 & -\ 22\ X_3 & = & -\ 62 \\ \boxed{X_1} & -\ 2\ X_2 & -\ 7\ X_3 & = & -\ 21 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}_1\left\{\begin{array}{rrrcr} & 2\ X_2 & +\ 5\ X_3 & = & 17 \\ & 4\ X_2 & +\ 13\ X_3 & = & 43 \\ X_1 & -\ 2\ X_2 & -\ 7\ X_3 & = & -\ 21 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} & \boxed{2\ X_2} & +\ 5\ X_3 & = & 17 \\ & 4\ X_2 & +\ 13\ X_3 & = & 43 \\ X_1 & -\ 2\ X_2 & -\ 7\ X_3 & = & -\ 21 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}_2\left\{\begin{array}{rrrcr} & 2\ X_2 & +\ 5\ X_3 & = & 17 \\ & & 3\ X_3 & = & 9 \\ X_1 & & -\ 2\ X_3 & = & -\ 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} & 2\ X_2 & +\ 5\ X_3 & = & 17 \\ & & \boxed{3\ X_3} & = & 9 \\ X_1 & & -\ 2\ X_3 & = & -\ 4 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}_3\left\{\begin{array}{rrrcr} & 2\ X_2 & & = & 2 \\ & & 3\ X_3 & = & 9 \\ X_1 & & & = & 2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} X_2 = 1 \\ X_3 = 3 \\ X_1 = 2 \end{array}$$

3. Commentaires & Question

▹ On a résolu le système en faisant uniquement des transformations du type : *ajouter à une équation un multiple d'une autre équation*.

▹ L'équation à ajouter ne peut pas être choisie n'importe comment. On a donc intérêt à regrouper les équations qui peuvent être choisies et *changeant l'ordre des équations*.

▹ Que faire quand tous les coefficients de X_k sont nuls dans les équations qui peuvent être choisies ?

▹ Plutôt que d'ajouter $-\dfrac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{j,k}}[\mathcal{E}_j]$ à $[\mathcal{E}_i]$, il serait *plus pratique* de diviser d'abord, et une fois pour toute, l'équation $[\mathcal{E}_j]$ par $\alpha_{j,k}$.

3 Les transformations

1. Pour passer de $\mathcal{S}_{k-1}$ à $\mathcal{S}_k$, on utilisera 3 sortes de transformations :

- L'*ajout* à une équation d'un multiple d'une autre équation.
  $[\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i + \alpha\,\mathcal{E}_j]$ signifie que la i^e équation est remplacée par sa somme avec α fois la j^e équation.
- L'*échange* de deux équations.
  $[\mathcal{E}_i \rightleftarrows \mathcal{E}_j]$ signifie que la i^e et la la j^e équations sont échangées.
- La *multiplication* d'une équation par un nombre non nul.
  $[\mathcal{E}_j \to \alpha\,\mathcal{E}_j]$ signifie que la j^e équation est multipliée par α.

Ces transformations modifient les systèmes, mais ne changent pas leurs solutions, car on peut toujours *revenir en arrière* :

▹ après $[\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i + \alpha\,\mathcal{E}_j]$ en faisant $[\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i - \alpha\,\mathcal{E}_j]$,

▹ après l'échange $[\mathcal{E}_i \rightleftarrows \mathcal{E}_j]$ en refaisant le même échange,

▹ après $[\mathcal{E}_j \to \alpha\,\mathcal{E}_j]$ en faisant $[\mathcal{E}_j \to \alpha^{-1}\mathcal{E}_j]$.

2. Les équations des systèmes auxiliaires seront réparties en deux groupes : les *équations déplaçables* et les *équations non déplaçables* :

- les équations *non déplaçables* sont *en haut* du système,
- les équations *déplaçables* sont *en bas*.

► Dans le système initial $\mathcal{S}_0$, toutes les équations sont déplaçables.

► L'ensemble des équations non déplaçables augmente de 0 ou 1 équation avec chaque nouveau système.

► Une équation qui devient non déplaçable dans un système auxiliaire va le rester dans tous les systèmes suivants.

► La méthode s'arrête quand la construction d'un nouveau système auxiliaire n'est plus possible.

► L'arrêt peut se produire pour deux sortes de causes :

• soit parce qu'on a passé en revue toutes les inconnues,

• soit parce que le dernier système trouvé n'a plus d'équation déplaçable ; dans ce cas, s'il reste des inconnues qui n'ont pas été passées en revues, on dit que ce sont des *inconnues non principales*.

3. Passage de $\mathcal{S}_{k-1}$ à $\mathcal{S}_k$
On commence par examiner les coefficients de X_k dans les *équations déplaçables* de $\mathcal{S}_{k-1}$.

• Si tous ces coefficients sont tous nuls, on dit que le *pivot de X_k est nul* et que X_k est une *inconnue non principale*. Dans ce cas $\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{k-1}$, et on passe directement à la construction de $\mathcal{S}_{k+1}$.

• Si un de ces coefficients n'est pas nul, on dit que X_k est une *inconnue principale*.

Étape 1 :
On choisit un coefficient non nul, on l'appelle le *pivot de X_k*.

Étape 2 :
Pour obtenir une équation où *le coefficient de X_k vaut 1*, on divise l'équation du pivot par le pivot.

Étape 3 :
On échange cette équation modifiée avec la plus haute équation déplaçable du système. Dans sa nouvelle position, cette équation devient non déplaçable.

Étape 4 :
On ajoute des multiples de cette nouvelle équation non déplaçable à *toutes les autres* équations du système, en choisissant les multiples pour éliminer X_k de ces équations, et l'on obtient $\mathcal{S}_k$.

4. Commentaires

► Le système $\mathcal{S}_k$ a une équation non déplaçable de plus que $\mathcal{S}_{k-1}$, et c'est la plus basse de ses équations déplaçables. C'est la seule équation de $\mathcal{S}_k$ où l'on trouve X_k. Dans cette équation, X_k a le coefficient 1.

► Les inconnues déjà passées en revue : $X_1, X_2, \ldots, X_k$, n'apparaissent plus dans les équations déplaçables de $\mathcal{S}_k$.

Leurs coefficients dans les équations déplaçables n'ont pas été modifiés lors du passage de $\mathcal{S}_{k-1}$ à $\mathcal{S}_k$, ce qui fait qu'ils ne seront plus jamais modifiés par la suite.

5. Exemple

$$\mathcal{S}_0 \left\{ \begin{array}{rrrrrcr} 2\,X_1 & -X_2 & -5\,X_3 & -10\,X_4 & +20\,X_5 & = & 0 \\ -2\,X_1 & +6X_2 & +20\,X_3 & +19\,X_4 & -28\,X_5 & = & -1 \\ 3\,X_1 & -5X_2 & -18\,X_3 & -25\,X_4 & +43\,X_5 & = & -3 \\ X_1 & -2X_2 & -7\,X_3 & -9\,X_4 & +15\,X_5 & = & 2p+1 \end{array} \right.$$

Passage à $\mathcal{S}_1$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} 2\,X_1 & -X_2 & -5\,X_3 & -10\,X_4 & +20\,X_5 & = & 0 \\ -2\,X_1 & +6X_2 & +20\,X_3 & +19\,X_4 & -28\,X_5 & = & -1 \\ 3\,X_1 & -5X_2 & -18\,X_3 & -25\,X_4 & +43\,X_5 & = & -3 \\ \boxed{X_1} & -2X_2 & -7\,X_3 & -9\,X_4 & +15\,X_5 & = & 2p+1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} \boxed{X_1} & -2X_2 & -7\,X_3 & -9\,X_4 & +15\,X_5 & = & 2p+1 \\ -2\,X_1 & +6X_2 & +20\,X_3 & +19\,X_4 & -28\,X_5 & = & -1 \\ 3\,X_1 & -5X_2 & -18\,X_3 & -25\,X_4 & +43\,X_5 & = & -3 \\ 2\,X_1 & -X_2 & -5\,X_3 & -10\,X_4 & +20\,X_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{S}_1 \left\{ \begin{array}{rrrrrcr} X_1 & -2X_2 & -7\,X_3 & -9\,X_4 & +15\,X_5 & = & 2p+1 \\ & +2X_2 & +6\,X_3 & +\,X_4 & +2\,X_5 & = & 4p+1 \\ & X_2 & +3\,X_3 & +2\,X_4 & -2\,X_5 & = & -6p-6 \\ & 3X_2 & +9\,X_3 & +8\,X_4 & -10\,X_5 & = & -4p-2 \end{array} \right.$$

Passage à $\mathcal{S}_2$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} X_1 & -2X_2 & -7\,X_3 & -9\,X_4 & +15\,X_5 & = & 2p+1 \\ & +2X_2 & +6\,X_3 & +\,X_4 & +2\,X_5 & = & 4p+1 \\ & \boxed{X_2} & +3\,X_3 & +2\,X_4 & -2\,X_5 & = & -6p-6 \\ & 3X_2 & +9\,X_3 & +8\,X_4 & -10\,X_5 & = & -4p-2 \end{array} \right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} X_1 & -2X_2 & -7\,X_3 & -9\,X_4 & +15\,X_5 & = & 2p+1 \\ & \boxed{X_2} & +3\,X_3 & +2\,X_4 & -2\,X_5 & = & -6p-6 \\ & +2X_2 & +6\,X_3 & +\,X_4 & +2\,X_5 & = & 4p+1 \\ & 3X_2 & +9\,X_3 & +8\,X_4 & -10\,X_5 & = & -4p-2 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}_2\left\{\begin{array}{rrrrrcl} X_1 & & -X_3 & -5\,X_4 & +11\,X_5 & = & -10p-11 \\ & X_2 & +3\,X_3 & +2\,X_4 & -2\,X_5 & = & -6p-6 \\ & & & -3\,X_4 & +6\,X_5 & = & 16p+13 \\ & & & +2\,X_4 & -4\,X_5 & = & 14p+16 \end{array}\right.$$

Le pivot de X_3 est nul, X_3 est une inconnue non principale, $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2$.

Passage à $\mathcal{S}_4$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} X_1 & & -X_3 & -5\,X_4 & +11\,X_5 & = & -10p-11 \\ & X_2 & +3\,X_3 & +2\,X_4 & -2\,X_5 & = & -6p-6 \\ & & & -3\,X_4 & +6\,X_5 & = & 16p+13 \\ & & & +\boxed{2\,X_4} & -4\,X_5 & = & 14p+16 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} X_1 & & -X_3 & -5\,X_4 & +11\,X_5 & = & -10p-11 \\ & X_2 & +3\,X_3 & +2\,X_4 & -2\,X_5 & = & -6p-6 \\ & & & -3\,X_4 & +6\,X_5 & = & 16p+13 \\ & & & +\boxed{X_4} & -2\,X_5 & = & 7p+8 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} X_1 & & -X_3 & -5\,X_4 & +11\,X_5 & = & -10p-11 \\ & X_2 & +3\,X_3 & +2\,X_4 & -2\,X_5 & = & -6p-6 \\ & & & +\boxed{X_4} & -2\,X_5 & = & 7p+8 \\ & & & -3\,X_4 & +6\,X_5 & = & 16p+13 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}_4\left\{\begin{array}{rrrrrcl} X_1 & & -X_3 & & +X_5 & = & 25p+29 \\ & X_2 & +3\,X_3 & & +2\,X_5 & = & -20p-22 \\ & & & +X_4 & -2\,X_5 & = & 7p+8 \\ & & & & 0 & = & 37p+37 \end{array}\right.$$

Le pivot de X_5 est nul, X_5 est une inconnue non principale, $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_4$.

$$\mathcal{S}_5\left\{\begin{array}{rrrrrcl} X_1 & & -X_3 & & +X_5 & = & 25p+29 \\ & X_2 & +3\,X_3 & & +2\,X_5 & = & -20p-22 \\ & & & +X_4 & -2\,X_5 & = & 7p+8 \\ & & & & 0 & = & 37p+37 \end{array}\right.$$

Finalement le système possède trois inconnues principales X_1, X_2, X_4, deux inconnues non principales X_3, X_5, et il reste une équation déplaçable.

4 Discussion

1. La construction des systèmes auxiliaires s'arrête parce qu'on a *épuisé toutes les inconnues ou toutes les équations*.

► S'il reste des équations *déplaçables* dans le système terminal, elles sont nécessairement de la forme $0 = b$. Alors :

- ou bien il existe au moins une *équation déplaçable* du système terminal de la forme $0 = b$, *avec* $b \neq 0$ et le système ne peut pas avoir de solution ; on dit qu'il est *impossible*.
- ou bien *toutes les équation déplaçable* du système terminal sont *de la forme* $0 = 0$.

► On supprime les équations de la forme $0 = 0$ et on se retrouve avec un système dans lequel chaque inconnue principale apparaît dans une et une seule équation, avec le coefficient 1.

2. Exemple

$$\mathcal{S}_5 \left\{ \begin{array}{ccccccc} X_1 & & -X_3 & & +X_5 & = & 25p+29 \\ & X_2 & +3\,X_3 & & +2\,X_5 & = & -20p-22 \\ & & & +X_4 & -2\,X_5 & = & 7p+8 \\ & & & & 0 & = & 37p+37 \end{array} \right.$$

- Si $p \neq -1$ le système n'a pas de solution.
- Si $p = -1$ on remplace le système par :

$$\mathcal{S}'_5 \left\{ \begin{array}{ccccccc} X_1 & & -X_3 & & +\,X_5 & = & 4 \\ & X_2 & +3\,X_3 & & +2\,X_5 & = & -2 \\ & & & +\,X_4 & -2\,X_5 & = & 1 \end{array} \right.$$

3. Quand *toutes les inconnues sont principales*, les équations du système terminal sont toutes de la forme $X_i = b_i$ avec b_i connu, et le système est résolu : $\mathcal{S}_0$ *possède une et une seule solution*.

4. Quand il y a des *inconnues non principales*, on les fait passer dans les membres de droite.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} X_1 & = & 4 & +X_3 & -\,X_5 \\ X_2 & = & -2 & -3\,X_3 & -2\,X_5 \\ X_4 & = & 1 & & +2\,X_5 \end{array} \right.$$

À chaque fois qu'on donne une valeur arbitraire aux inconnues non principales, on obtient une valeur des inconnues principales : le système est *indéterminé*, mais on vient de trouver une *description* de l'ensemble des solutions.

5. Le système terminal dépend du *choix des pivots* et de l'*ordre* dans lequel les inconnues sont examinées. Si l'on change les pivots ou l'ordre des inconnues, on obtient un autre système terminal, avec d'autres inconnues principales, mais le *nombre d'inconnues principales reste le même*.
On appelle ce nombre le *rang* du système.
La conduite de la méthode ne tient aucun compte des seconds membres, seuls les premiers membres des équations interviennent. Pour cette raison on dit que le rang est un *invariant* attaché aux coefficients du système.