Chapitre 10 – Déterminants

1 Introduction

1. Le *système linéaire général d'ordre n* est un système ayant *n équations* et *n inconnues*, et dont les coefficients et les seconds membres sont des *paramètres* :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{1,1}\,X_1 & + & \alpha_{1,2}\,X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,n}\,X_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\,X_1 & + & \alpha_{2,2}\,X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,n}\,X_n & = & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,1}\,X_1 & + & \alpha_{n,2}\,X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{n,n}\,X_n & = & \beta_n \end{array}\right.$$

2. En résolvant ce système, on obtient les *formules de Cramer*.

Exemples :

- $n = 1$ $\quad \alpha_{1,1}X_1 = \beta_1$ admet l'unique solution : $\boxed{X_1 = \dfrac{\beta_1}{\alpha_{1,1}}}$

- $n = 2$ $\quad \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha_{1,1}\,X_1 & + & \alpha_{1,2}\,X_2 & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\,X_1 & + & \alpha_{2,2}\,X_2 & = & \beta_2 \end{array}\right.$ admet l'unique solution :

$$\boxed{\begin{array}{l} X_1 = \dfrac{\beta_1\,\alpha_{2,2} - \beta_2\,\alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}} \\[2ex] X_2 = \dfrac{-\beta_1\,\alpha_{2,1} + \beta_2\,\alpha_{1,1}}{\alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}} \end{array}}$$

- $n = 3$ $\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha_{1,1}\,X_1 & + & \alpha_{1,2}\,X_2 & + & \alpha_{1,3}\,X_3 & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\,X_1 & + & \alpha_{2,2}\,X_2 & + & \alpha_{2,3}\,X_3 & = & \beta_2 \\ \alpha_{3,1}\,X_1 & + & \alpha_{3,2}\,X_2 & + & \alpha_{3,3}\,X_3 & = & \beta_3 \end{array}\right.$ admet l'unique solution :

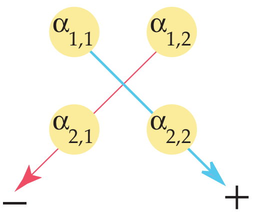
$$\boxed{\begin{array}{l} X_1 = \dfrac{\beta_1\,(\alpha_{2,2}\alpha_{3,3} - \alpha_{2,3}\alpha_{3,2}) + \beta_2\,(\alpha_{1,3}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{3,3}) + \beta_3\,(\alpha_{1,2}\alpha_{2,3} - \alpha_{1,3}\alpha_{2,2})}{\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}+\alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1}+\alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1}-\alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}} \\[2ex] X_2 = \dfrac{\beta_1\,(\alpha_{2,3}\alpha_{3,1} - \alpha_{2,1}\alpha_{3,3}) + \beta_2\,(\alpha_{1,1}\alpha_{3,3} - \alpha_{1,3}\alpha_{3,1}) + \beta_3\,(\alpha_{1,3}\alpha_{2,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,3})}{\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}+\alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1}+\alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1}-\alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}} \\[2ex] X_3 = \dfrac{\beta_1\,(\alpha_{2,1}\alpha_{3,2} - \alpha_{2,2}\alpha_{3,1}) + \beta_2\,(\alpha_{1,2}\alpha_{3,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{3,2}) + \beta_3\,(\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1})}{\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}+\alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1}+\alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1}-\alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2}-\alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}} \end{array}}$$

3. Le dénominateur des formules de Cramer est le *déterminant* de la matrice : $A_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$

On le note $\det(A_n)$ ou $\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$ ou Δ_n .

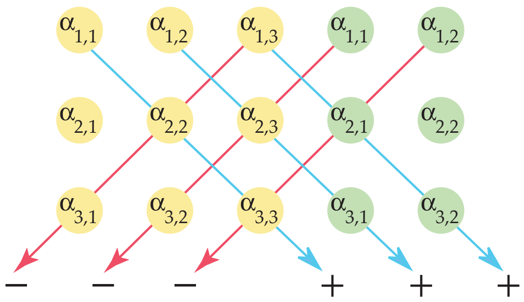
$\Delta_1 = \alpha_{1,1}$

$\Delta_2 = \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}$ $\qquad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}$



$\Delta_3 = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3} + \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1} + \alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}$

Règle de Sarrus $\qquad A_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}$



4. On peut *deviner* la formule pour Δ_n :

$\Delta_2 = +\alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,1}$

$\Delta_3 = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3} + \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1} + \alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}$

$$\begin{aligned}\Delta_4 = &+ \alpha_{1,4}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2}\alpha_{4,1} - \alpha_{1,3}\alpha_{2,4}\alpha_{3,2}\alpha_{4,1} - \alpha_{1,4}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}\alpha_{4,1} + \alpha_{1,2}\alpha_{2,4}\alpha_{3,3}\alpha_{4,1} + \alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,4}\alpha_{4,1}\\ &- \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{4,1} - \alpha_{1,4}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1}\alpha_{4,2} + \alpha_{1,3}\alpha_{2,4}\alpha_{3,1}\alpha_{4,2} + \alpha_{1,4}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}\alpha_{4,2} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,4}\alpha_{3,3}\alpha_{4,2}\\ &- \alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,4}\alpha_{4,2} + \alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{4,2} + \alpha_{1,4}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1}\alpha_{4,3} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,4}\alpha_{3,1}\alpha_{4,3} - \alpha_{1,4}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,3}\\ &+ \alpha_{1,1}\alpha_{2,4}\alpha_{3,2}\alpha_{4,3} + \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,4}\alpha_{4,3} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,4}\alpha_{4,3} - \alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1}\alpha_{4,4} + \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1}\alpha_{4,4}\\ &+ \alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,4} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2}\alpha_{4,4} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}\alpha_{4,4} + \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}\alpha_{4,4}\end{aligned}$$

Formule : Si σ représente une façon de ranger les nombres $1, 2, \ldots, n$ (on dit que σ est une *permutation* ; il y a $n\,!$ permutations), si $\sigma(i)$ représente le nombre rangé en i^e position par σ, on aura :

$$\boxed{\det(A_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\alpha_{1,\sigma(1)}\,\alpha_{2,\sigma(2)}\,\cdots\,\alpha_{n,\sigma(n)}}$$

Le coefficient $\varepsilon(\sigma)$, égal à ± 1, s'appelle la *signature* de σ. Il correspond à la parité du nombre d'échange de deux nombres qu'il faut faire pour retrouver σ.

Exemple : $\quad \alpha_{1,2}\,\alpha_{2,4}\,\alpha_{3,1}\,\alpha_{4,3} \qquad \sigma\downarrow\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix}$

$1234 \to 3214 \to 2314 \to 2413 \qquad \varepsilon(\sigma) = -1$

2 Propriétés du déterminant

1. On remarque qu'il y a toujours $+\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\cdots\alpha_{n,n}$ dans $\det(A_n)$.

Théorème : Le déterminant d'une *matrice triangulaire* est égal au produit de ses coefficients diagonaux. En particulier :

$$\boxed{\det(I_n) = +1}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

matrice *triangulaire supérieure* matrice *triangulaire inférieure*

2. **Théorème** :

- $\boxed{\det({}^tA) = \det(A)}$
$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 1 & 3 \\ \mathbf{5} & 2 & 6 \\ \mathbf{8} & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

- Quand on multiplie *une et une seule ligne*, ou *une et une seule colonne* d'une matrice par un nombre, son determinant est multiplié par ce nombre.

$$\mathbf{2}\begin{vmatrix} \mathbf{0} & 5 & 8 \\ \mathbf{1} & 2 & 4 \\ \mathbf{3} & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 5 & 8 \\ \mathbf{2} & 2 & 4 \\ \mathbf{6} & 6 & 7 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{2}\begin{vmatrix} 0 & 5 & 8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 8 \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

- Quand deux matrices ne diffèrent que par *une seule ligne* ou par *une seule colonne*, le déterminant de la matrice obtnue en ajoutant ces lignes, ou ces colonnes, tout en gardant les autres coefficients intacts est la somme de leurs déterminants.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ \mathbf{9} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{vmatrix}$$

- Quand on échange 2 lignes ou 2 colonnes d'une matrice, le déterminant est multiplié par −1.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & 5 & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & 2 & \mathbf{4} \\ \mathbf{6} & 6 & \mathbf{7} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{8} & 5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & 2 & \mathbf{2} \\ \mathbf{7} & 6 & \mathbf{6} \end{vmatrix}$$

3. **Théorème** :

- Une matrice qui possède une *ligne nulle*, ou une *colonne nulle*, a un déterminant nul.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & 5 & 8 \\ \mathbf{0} & 2 & 4 \\ \mathbf{0} & 6 & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 5 & 8 \\ \mathbf{1} & 2 & 4 \\ \mathbf{1} & 6 & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

- Une matrice qui a deux *lignes égales*, ou deux *colonnes égales* a un déterminant nul.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & 5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & 2 & \mathbf{2} \\ \mathbf{6} & 6 & \mathbf{6} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{0} & 5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & 2 & \mathbf{2} \\ \mathbf{6} & 6 & \mathbf{6} \end{vmatrix}$$

- Quand on *ajoute à une ligne des multiples des autres lignes* ou a une colonne des multiples des autres colonnes, on obtient une matrice qui a le même déterminant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 0 & 2 & 4 \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{8} \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Théorème : $\boxed{\det(A\,B) = \det(A)\det(B)}$

4. **Théorème** : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est *singulière*,
- $\det(A) = 0$,
- le système $AX = 0$ a d'autres solutions que la solution nulle.

Théorème : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est *régulière*,
- $\det(A) \neq 0$,
- la matrice *A est inversible*. $\boxed{\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}}$

3 Calcul des déterminants

1. Manipulation sur les lignes ou les colonnes.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{\Rightarrow} \quad \Delta = bc^2 + ab^2 + ca^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\boxed{bc^2 + ab^2 + ca^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2 = -(b-a)(c-b)(a-c)}$$

2. Si l'on met $\alpha_{i,j}$ en facteur dans tous les termes de Δ_n, qui le contiennent, on obtient un produit noté $\alpha_{i,j}\,\Gamma_{i,j}$ et $\Gamma_{i,j}$ s'appelle le *cofacteur* de $\alpha_{i,j}$.

$\Delta_3 = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3} + \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1} + \alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}$

$\Rightarrow \Gamma_{2,2} = \alpha_{1,1}\alpha_{3,3} - \alpha_{1,3}\alpha_{3,1}$

En faisant ces mises en facteur avec tous les coefficients d'une ligne ou d'une colonne, on obtient le *développement du déterminant selon une ligne* ou une colonne.

$\Delta_3 = \alpha_{2,1}(\alpha_{1,3}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{3,3}) + \alpha_{2,2}(\alpha_{1,1}\alpha_{3,3} - \alpha_{1,3}\alpha_{3,1}) + \alpha_{2,3}(\alpha_{1,2}\alpha_{3,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{3,2})$

$\Delta_3 = \alpha_{2,1}\,\Gamma_{2,1} + \alpha_{2,2}\,\Gamma_{2,2} + \alpha_{2,3}\,\Gamma_{2,3}$

Définition : $\Delta_{i,j}$, le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en effaçant la i^e ligne et la j^e colonne de A s'appelle le *mineur d'indices i et j*.

$$\Delta_{2,1} = \begin{vmatrix} \blacksquare & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \alpha_{1,2}\alpha_{3,3} - \alpha_{1,3}\alpha_{3,2}$$

On a la formule : $\boxed{\Gamma_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}}$ et la *règle du damier* :

+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+

4 Formule pour l'inverse d'une matrice

1. On appelle *comatrice* de A la matrice $\widetilde{A}$, qui a pour coefficients :

$$\boxed{\widetilde{A}_{i,j} = \Gamma_{j,i}}$$

La comatrice s'obtient en deux étapes : on remplace d'abord chaque coefficient par son cofacteur, puis on transpose.

2. **Théorème** : $\boxed{A\,\widetilde{A} = \widetilde{A}\,A = \det(A)\ I}$

Si A est inversible : $\boxed{A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right)\widetilde{A} \qquad \left(A^{-1}\right)_{i,j} = \frac{\Gamma_{j,i}}{\det(A)}}$

Exemple : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3. Formules de Cramer (version définitive)

La solution de : $\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ est : $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \Gamma_{1,1} & \Gamma_{2,1} & \cdots & \Gamma_{n,1} \\ \Gamma_{1,2} & \Gamma_{2,2} & \cdots & \Gamma_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Gamma_{1,n} & \Gamma_{2,n} & \cdots & \Gamma_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

donc : $\boxed{X_i = \frac{\beta_1\,\Gamma_{1,i} + \beta_2\,\Gamma_{2,i} + \cdots + \beta_m\,\Gamma_{m,i}}{\det A}}$