Chapitre 1— Séries numériques

5 Séries semi-convergentes

Une série convergente, qui n'est pas absolument convergente, est une ***série semi-convergente***.

Théorème des séries alternées : Si a_n est une suite de nombres réels positifs qui tend vers 0 en décroissant, la série : $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$ converge et les sommes partielles encadrent la somme de la série.

Exemple : $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots$ converge.

6 Opérations sur les séries

- Si C est une constante non nulle, les séries de termes généraux u_n et Cu_n sont de même nature. Quand elles convergent : $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(C\,u_n) = C\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big)}$

- Si les séries de termes généraux u_n et v_n convergent, il en est de même de la série de terme général $(u_n + v_n)$, et : $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big) + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\Big)}$

- Quand une série converge et une autre diverge, leur somme diverge.

- Si les séries de t.g. u_n et v_n sont absolument convergentes, il en est de même de la série de terme général $\boxed{w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0}$.

$$\begin{array}{cccc} \boxed{u_0v_0} & \boxed{u_1v_0} & \boxed{u_2v_0} & u_3v_0 \\ \boxed{u_0v_1} & \boxed{u_1v_1} & u_2v_1 & \cdots \\ \boxed{u_0v_2} & u_1v_2 & \cdots & \cdots \\ u_0v_3 & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \qquad \boxed{\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\Big)}$$

- Quand une série est absolument convergente, on peut changer l'ordre des termes comme on veut, la série reste absolument convergente et garde la même somme.

- Quand une série est absolument convergente, on peut associer les termes comme on veut, la série reste absolument convergente et garde la même somme.

Exemple : La série harmonique alternée

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p}\right) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2p(2p-1)}$$

On change l'ordre des termes :

$$S' = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{1}\right) + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{2k-1}\right) + \cdots$$

$$S' = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \cdots + \frac{1}{4k(2k-1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4k(2k-1)} = \frac{S}{2}$$

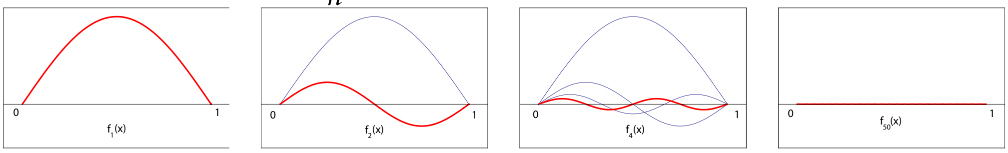
Chapitre 2— Suites et séries de fonctions

1 Suites et séries de fonctions

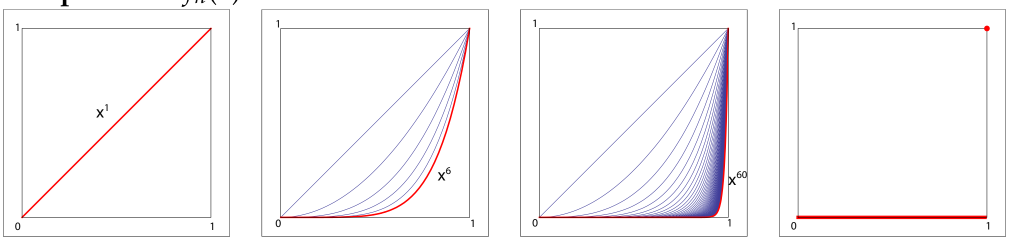
- On a des fonction f_n et on définit $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ en posant : $\boxed{f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)}$. Si f existe, on dit que la suite f_n est convergente et que f_n tend vers f.

- On a des fonction numérotées, $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ et on définit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ en posant $S(x) = \lim\limits_{p\to\infty} S_p(x)$ avec $S_p(x) = \sum\limits_{n=0}^{p} u_n(x)$. Si S existe, on dit que la série de fonctions de terme général u_n est convergente et que S est sa somme.

Exemple 1 $f_n(x) = \dfrac{\sin(2\pi n\, x)}{n^2}$. La limite est la fonction constamment nulle.

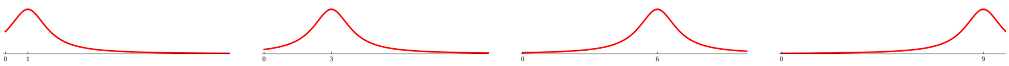


Exemple 2 $f_n(x) = x^n$



$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Exemple 3 : $f_n(x) = \dfrac{1}{(x-n)^2+1}$ La limite est la fonction constamment nulle.



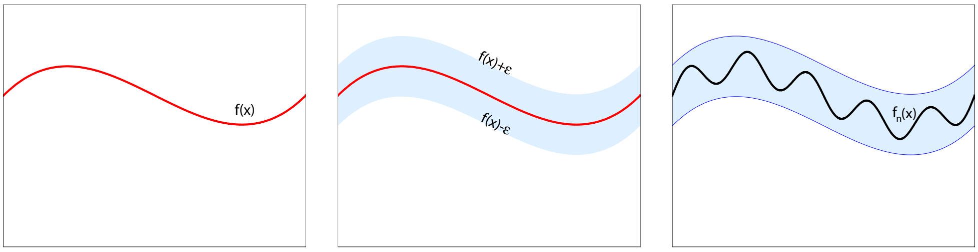
2 Convergence uniforme

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_x \text{ (qui dépend de } x) \\ \text{tel que } |\, f(x) - f_n(x)\,| < \varepsilon \text{ quand } n \geqslant N_x\,. \end{cases}$$

Il y a du retard quand N_x est beaucoup plus grand pour certains x, que pour les autres.

La convergence est ***uniforme*** quand on peut prendre le même N_x pour tous les x :

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } |\, f(x) - f_n(x)\,| < \varepsilon \\ \text{quel } \forall n \geqslant N \text{ et } \forall x\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N \text{ tel que} \\ \max\limits_{x} |\, f(x) - f_n(x)\,| < \varepsilon \ \forall n \geqslant N\,. \end{cases}$$



La convergence est uniforme quand la courbe représentative de f_n vient se coller sur celle de f.

Théorème : Soit f_n une suite de fonctions définies sur un intervalle $\Im$.

- Si les f_n sont continues sur $\Im$ et si la convergence est uniforme, la fonction limite est continue sur $\Im$.
- Si a et b sont dans $\Im$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)}$$

L'intégrale de la limite est la limite de l'intégrale !

Théorème : Soient f_n une suite de fonctions continues sur un intervalle $\Im$ *borné*, et a un point de $\Im$; on note F_n la primitive f_n qui s'annule au point a. Alors, les fonctions F_n convergent uniformément vers F, la primitive de f qui s'annule au point a.

Si elles s'annulent toutes en un même point, la primitive de la limite est la limite de la primitive !

Théorème : Soit f_n une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle $\Im$ *borné*.
Si les fonctions f'_n convergent uniformément sur $\Im$ et s'il existe au moins un point a dans $\Im$ tel que la suite de nombre $f_n(a)$ converge, alors :

- la suite de nombre $f_n(x)$ converge quel que soit x dans $\Im$ vers un nombre $f(x)$.
- la convergence de f_n vers f est uniforme sur $\Im$.
- la fonction f est de classe C^1 sur $\Im$ et : $\boxed{f' = \lim_{n\to\infty} f'_n}$.

Cas des séries

Théorème : Soit u_n une suite de fonctions continues définies sur un intervalle $\Im$.

- Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformément, sa somme est une fonction continue sur $\Im$.
- Si a et b sont dans $\Im$: $\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b u_n(t)dt\right)}$.

L'intégrale de la somme est la somme des intégrales !

Théorème : Soit u_n une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle borné $\mathfrak{I}$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$ converge uniformément sur $\mathfrak{I}$, et s'il existe $a \in \mathfrak{I}$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(a)$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformément dans $\mathfrak{I}$, la somme est de classe C^1 et :

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)}$$

Convergence normale

Théorème : Soient u_n une suite de fonctions *bornées* et $M_n = \max_x |u_n(x)|$.

Si la série à termes positifs $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathfrak{I}$ et $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} M_n$. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converge *normalement*.

Exemple La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n^2}$ converge normalement car : $\left(u_n = \frac{\sin 2\pi nx}{n^2}\right) \Rightarrow \left(M_n = \frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.