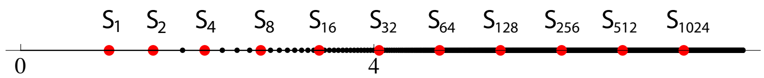
Chapitre 1— Séries numériques

1 Exemples fondamentaux

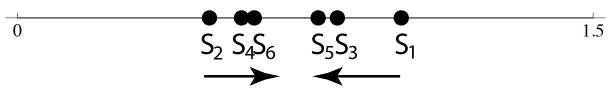
1. *La série harmonique :* $\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots}$



$$S_{2^{p+1}}=\underbrace{\left(1+\cdots+\frac{1}{2^p}\right)}_{S_{2^p}}+\left(\frac{1}{2^p+1}+\cdots+\frac{1}{2^{p+1}}\right)\Rightarrow S_{2^{p+1}}-S_{2^p}=\left(\frac{1}{2^p+1}+\cdots+\frac{1}{2^{p+1}}\right)\geqslant\underbrace{\left(\frac{1}{2^{p+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{p+1}}\right)}_{2^p\text{termes}}$$

$$\Rightarrow\quad S_{2^{p+1}}-S_{2^p}\geqslant 2^p\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty}$$

2. *La série harmonique alternée :* $\boxed{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}+\cdots}$

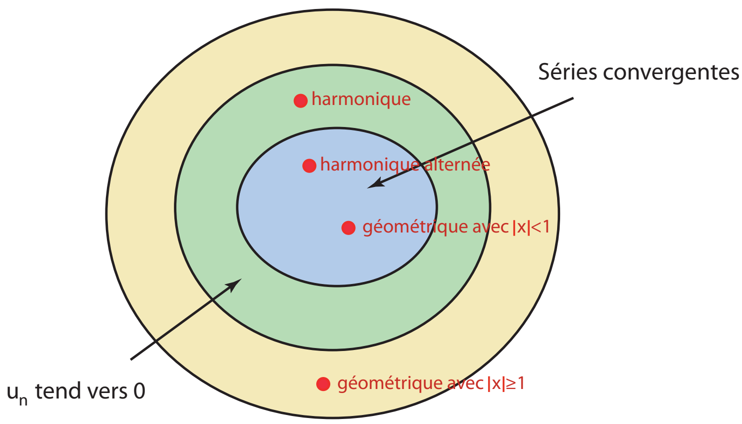


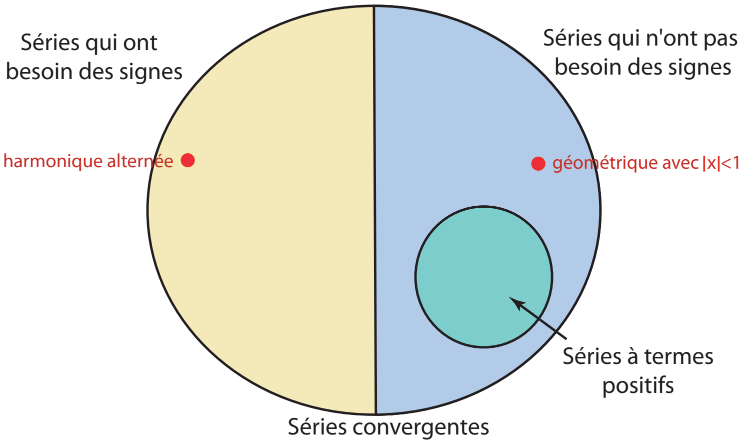
$$\left(S_{2p+1}\searrow\right)\qquad\left(S_{2p}\nearrow\right)\qquad\left(S_{2p}<S_{2q+1}\right)\qquad\left(S_{2p+1}-S_{2p}\right)\to 0$$

Les sommes partielles ont une limite commune $\Rightarrow$ la série harmonique alternée converge.

2 Classification des séries

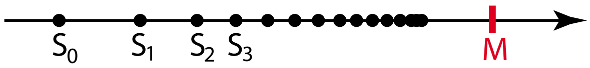
Théorème : Si la série de terme général u_n converge, on a forcément $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.





3 Séries à termes positifs

1. **Théorème** Pour qu'une série à termes positifs converge, il faut et il suffit que les S_n soient toutes majorées par un même nombre M.



On considère deux séries de termes généraux u_n et v_n avec $u_n \leqslant v_n$ quel que soit n à partir d'un certain rang. La série de terme général u_n est la série minorante, la série de terme général v_n est la série majorante.

2. **Théorème de comparaison**
   - Si la série majorante converge, les deux séries convergent.
   - Si la série minorante diverge, les deux séries divergent.

3. **Règle de d'Alembert**
On suppose $u_n > 0$ quel que soit n (*s'il y a des termes nuls, on les élimine*).
   - Convergence s'il existe $C < 1$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant C$ quel que soit n.
   - Divergence si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ quel que soit n.

Cas particulier de la Règle de d'Alembert
On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L$.
   - Si $L < 1$, la série converge.
   - Si $L > 1$, la série diverge.

4. **Règle de Cauchy**
On suppose $u_n \geqslant 0$ quel que soit n.
   - Convergence s'il existe $C < 1$ tel que $\sqrt[n]{u_n} \leqslant C$ quel que soit n.
   - Divergence si $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$ quel que soit n.

Cas particulier de la Règle de Cauchy
On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$.
   - Si $L < 1$, la série converge.
   - Si $L > 1$, la série diverge.

5. **Comparaison avec une intégrale**

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty]$, intégrable sur tout intervalle de la forme $[1, A]$.

▹ On dit que $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$ converge si $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt = \lim_{A\to\infty}\left(\int_1^A f(t)dt\right)$ existe.

▹ Si la limite n'existe pas, on dit que $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$ diverge.

Théorème On suppose $f(x) \geqslant 0$ quel que soit x. Alors :

La série de terme général $u_n = f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$ ont le même comportement.

La série de Riemann $\boxed{1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \cdots + \dfrac{1}{n^s} + \cdots}$ converge si et seulement si $s > 1$.

4 Séries absolument convergentes

1. **Théorème** Quand la série $|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$ converge, la série $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ converge elle-aussi et :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

On dit qu'une série convergente $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ est absolument convergente quand la série $|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$ converge.

Exemple 1 : Une série géométrique convergente est absolument convergente.

Exemple 2 : La série harmonique alternée n'est pas absolument convergente.

Une série convergente, qui n'est pas absolument convergente, s'appelle une série semi-convergente.

Théorème des séries alternées Soit a_n une suite de nombres réels positifs qui tend vers 0 en décroissant. Alors la série :

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

converge et les sommes partielles encadrent la somme de la série.

Commentaire : Les séries absolument convergentes sont les « *bonnes* » séries convergentes.