Chapitre 1— Séries numériques

1 Comment ajouter une infinité de nombres ?

$$0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

$$1 + 1 + 1 + \cdots = +\infty$$

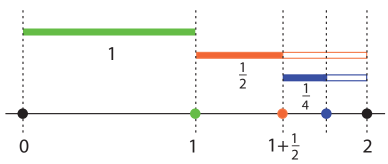
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = ?$$

$$\left(\left(\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

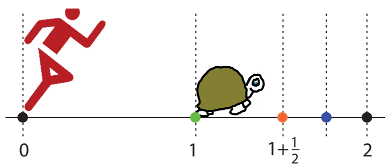
$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 + \tfrac{1}{2} &&= 1,5 \\
S_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} &&= 1,75 \\
S_3 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} &&= 1,875
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{10} &= 1,99902\ldots \\
S_{15} &= 1,99996\ldots \\
S_{20} &= 1,99999904\ldots \\
S_{25} &= 1,99999997\ldots \\
\ldots &\quad \ldots \\
S_{200} &= 1,99999999999999999999999999999999999999999999999999999999999937\ldots
\end{aligned}$$

$$\boxed{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2}$$



Paradoxe d'Achille et la tortue (Zénon d'Élée $[-480, -420]$).



Pour ajouter $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ on calcule leurs « *sommes partielles* » :

$$\begin{cases} S_0 & = u_0 \\ S_1 & = u_0 + u_1 \\ S_2 & = u_0 + u_1 + u_2 \\ \cdots & \cdots \\ S_p & = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_p = \sum_{n=0}^{p} u_n \end{cases} \tag{1}$$

Quand S_n se *stabilise* — on dit « *converge* » — sur un nombre S, on dit que S est la « *somme* » de la « *série de terme général u_n* » et on écrit :

$$\boxed{S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n}$$

$$u_0 = S_0 \qquad \text{et} \qquad u_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{quand } n \neq 0 \tag{2}$$

2 Convergence d'une suite

1. Soit S un nombre réel.
   Définition : On dit que la suite S_n admet pour limite S si, quel que soit $\varepsilon > 0$ (*aussi petit soit-il*), il n'y a qu'un nombre fini de S_n hors de l'intervalle $]S - \varepsilon, S + \varepsilon[$.
   Propriété : Si un tel S existe, il est forcément unique.
   Quand S existe, on dit que la suite « *converge* » vers S, ou que S est la « *limite* » de S_n quand n tend vers l'infini, et on écrit :

   $$\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

   Une suite qui a une limite est une « *suite convergente* » , une suite qui n'en a pas est une « *suite divergente* » et on dit qu'elle « *diverge* ».
   Propriété : On ne change pas la limite d'une suite quand on change un nombre fini de termes.
   Exemple : une suite « *suite stationaire* » (suite constante à partir d'un certain indice) $S_n = C$, tend vers C quand vers vers l'infini.
   Exemple : la suite $S_n = \dfrac{1}{n}$ tend vers 0 quand vers vers l'infini.
2. $$\boxed{\lim_{n\to\infty} (S_n + i\,T_n) = (\lim_{n\to\infty} S_n) + i\,(\lim_{n\to\infty} T_n)}$$

   Théorème : Soit x un nombre fixé, réel ou complexe.
   - $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ quand $|x| < 1$,
   - la suite x^n est stationnaire quand $x = 1$,
   - la suite x^n est divergente quand $|x| \geqslant 1$ et $x \neq 1$.

3. Si, quel que soit $A > 0$ (*aussi grand soit-il*), il n'y a qu'un nombre fini de S_n hors de l'intervalle $]A, +\infty[$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$
4. Critère de Cauchy : Le suite S_n converge si et seulement si, quel que soit $\varepsilon > 0$ (*aussi petit soit-il*), il existe un indice N tel que $| S_p - S_q | < \varepsilon$ dès que $p > N$ et $q > N$.
5. Théorème
   • Si la suite est croissante à partir d'un certain indice ($S_n \leqslant S_{n+1}$) et si $S_n \leqslant M$ à partir d'un certain indice, alors la suite S_n a une limite S et $S \leqslant M$.
   • Si la suite est décroissante à partir d'un certain indice ($S_n \geqslant S_{n+1}$) et si $S_n \geqslant m$ à partir d'un certain indice, alors la suite S_n a une limite S et $S \geqslant m$.
6. Opérations sur les limites
   • *La limite d'une somme de suites convergentes est la somme de leurs limites* :
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(S_n + T_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} T_n\right)}$$
   • *La limite d'un produit de suites convergentes est le produit de leurs limites* :
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(S_n\, T_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} S_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} T_n\right)}$$
   Cas particulier : si C est une constante
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(C\, S_n\right) = C\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right)}$$
   • *La limite d'un quotient de suites convergentes est le quotient de leurs limites, quand celle du dénominateur n'est pas* 0 .
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{T_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} S_n}{\lim\limits_{n\to\infty} T_n} \qquad \text{quand } \left(\lim_{n\to\infty} T_n\right) \neq 0}$$
   • *les inégalités larges passent à la limite* :
$$\boxed{S_n \leqslant T_n \quad \forall n \text{ à partir d'un certain indice} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \lim_{n\to\infty} T_n}$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n < \lim_{n\to\infty} T_n \quad \Rightarrow \quad S_n < T_n \text{ à partir d'un certain indice}$$
7. La série de terme général u_n converge quand la suite S_n des sommes partielles converge. La limite de S_n est la somme de la série, autrement dit :
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

3 Exemples fondamentaux

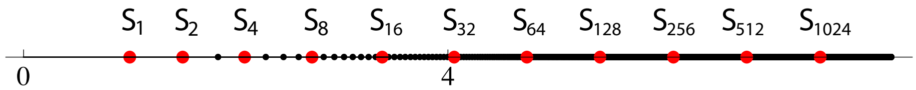
1. La série géométrique : $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ avec x fixé.
   • Quand $|x| < 1$ la série géométrique converge et :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}} \tag{3}$$

   • Quand $|x| \geqslant 1$ la série géométrique diverge.
   Démonstration
   • $x = 1 \quad \Rightarrow \quad S_n = (n+1)$ et la série diverge.
   • $x \neq 1$: $\boxed{A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)(A^n + A^{n-1}B + A^{n-2}B^2 + \cdots + AB^{n-1} + B^n)}$
   $(1 - x^{n+1}) = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n)$

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} - x^n\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

2. La série harmonique : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$.



$$S_{2^{p+1}} = 1 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2^{p+1}}$$

$$S_{2^{p+1}} = \left(1 + \cdots + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{2^p+1} + \cdots + \frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

$$S_{2^{p+1}} \geqslant S_{2^p} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{p+1}}\right)}_{2^p \text{termes}}$$

$$S_{2^{p+1}} \geqslant S_{2^p} + \frac{1}{2}$$

$$S_{2^p} \geqslant 1 + \frac{p}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{p\to\infty} S_{2^p} = +\infty$$