MVA004 CNAM - Paris

Corrigé du devoir $n°2$

Exercice $n°1$

1°) La liste des mots de longueur 4 acceptés par l'automate est :

$$l_4 = \{b^4, ab^3, a^2b^2, a^3b, ba^3, b^2a^2, b^3a, bab^2, a^2ba, aba^2, ab^2a, ba^2b\}$$

2°) Le mot $ab^3a^2b^2a^{14}b^5$ est accepté par l'automate car ab^3 envoit l'état 1 sur l'état 2 puis ensuite un nombre pair de a suivit d'un nombre quelconque de b le fait rester dans l'état 2 qui est acceptant.

3°) Ecrivons les équations de la méthode de départ :

$$\left\{\begin{array}{c} D_1 = aD_1 + bD_2 \\ D_2 = \varepsilon + aD_3 + bD_2 \\ D_3 = \varepsilon + aD_2 + bD_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} D_2 = \varepsilon + a(\varepsilon + aD_2 + bD_1) + bD_2 = (a^2+b)D_2 + abD_1 + a + \varepsilon \\ \text{d'où par Arden } D_2 = (a^2+b)^*(\varepsilon + a + abD_1) \\ \text{donc } D_1 = aD_1 + b(a^2+b)^*(\varepsilon + a + abD_1) \\ = (a + b(a^2+b)^*ab)D_1 + b(a^2+b)^*(\varepsilon + a) \\ \text{d'où par Arden } D_1 = (a + b(a^2+b)^*ab)^*b(a^2+b)^*(\varepsilon + a) \end{array}\right.$$

Le langage de l'automate est donc : $L = (a + b(a^2+b)^*ab)^*b(a^2+b)^*(\varepsilon + a)$.

4°) Ecrivons les équations de la méthode d'arrivée :

$$\left\{\begin{array}{c} A_1 = \varepsilon + A_1a + A_3b \\ A_2 = A_1b + A_2b + A_3a \\ A_3 = A_2a \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{d'où par Arden } A_1 = (\varepsilon + A_3b)a^* = (\varepsilon + A_2ab)a^* \\ A_2 = (\varepsilon + A_2ab)a^*b + A_2b + A_2a^2 = A_2(aba^*b + b + a^2) + a^*b \\ \text{d'où par Arden } A_2 = a^*b(aba^*b + b + a^2)^* \text{et } A_3 = a^*b(aba^*b + b + a^2)^*a \end{array}\right.$$

Le langage de l'automate est donc :

$$L = A_2 + A_3 = a^*b(aba^*b + b + a^2)^*(a + \varepsilon)$$

Remarque : les expressions trouvées par les deux méthodes ont l'air différentes mais d'après l'unicité du langage d'un automate, elles sont égales. Une démonstration directe de cette égalité serait extrêmement longue .

Exercice n°2

1°) Calculons les résiduels du langage $L = b(ab^2)^*$:

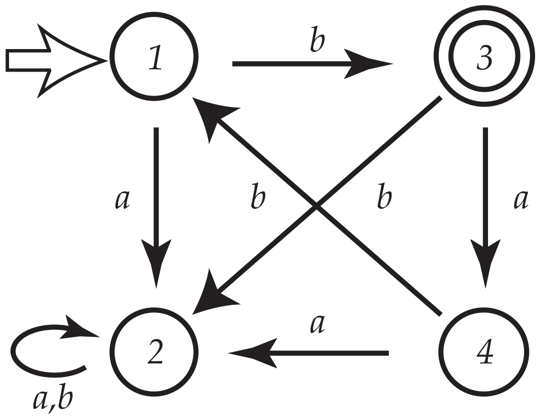
$$\varepsilon^{-1}L = L \quad a^{-1}L = \emptyset \quad \text{car il n'y a pas de mot dans } L \text{ commencant par } a$$

$$b^{-1}L = (ab^2)^*, \quad (ba)^{-1}L = b^2(ab^2)^* \quad \text{car les mots de } L \text{ commençant par } ba \text{ sont de la forme } bab^2(ab^2)^n$$

$$(bab)^{-1}L = b(ab^2)^* = L \quad \text{car les mots de } L \text{ commençant par } bab \text{ sont de la forme } babb(ab^2)^n$$

Tous les mots de L de longueur supérieure ou égale à 3 commencant par bab tous les autres résiduels relatifs à des mots de 2 ou 3 lettres sont vides . $(ab^2)^*, b(ab^2)^*, b^2(ab^2)^*, \emptyset$ sont clairement tous distincts donc le langage L admet 4 résiduels.

2°) On obtient donc l'automate suivant admettant L comme langage sachant que les états acceptants correspondent aux résiduels contenant ϵ et que la flêche a (respectivement b) envoit l'état i correspondant au résiduel D_i sur l'état j correspondant au résiduel $a^{-1}D_i$ (respectivement $b^{-1}D_i$) :



3°) Par construction l'automate est minimal puisque ses langages de départ sont tous distincts.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆