MVA003

Combinatoire, probabilités ordre, calcul booléen

séance n°12

MVA003

Chapitre 14

Calcul des prédicats
récurrences

1. Prédicats

2. Quantificateurs

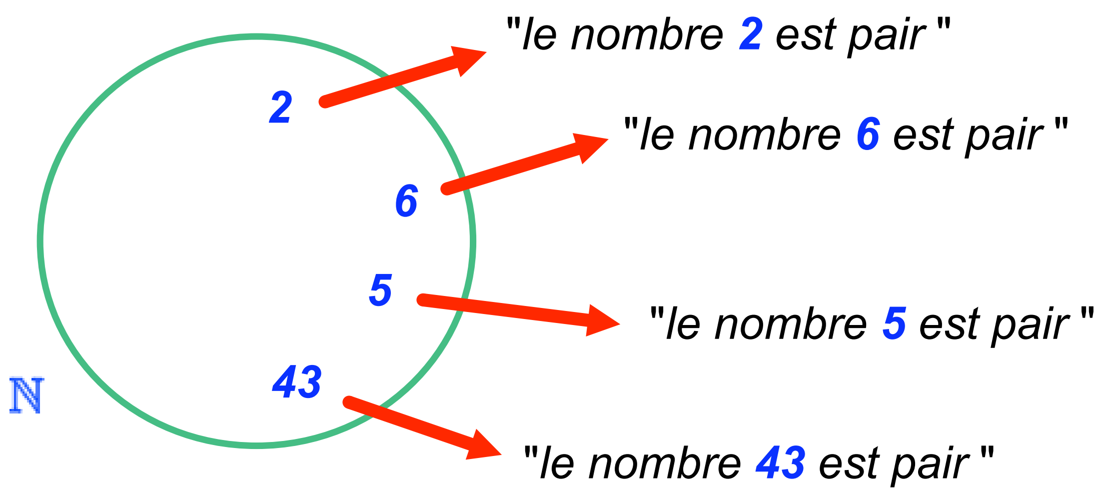
3. Le principe de récurrence

Prédicats

L'affirmation "*le nombre **n** est pair* " est-elle une proposition ?

*Réponse : ça dépend de **n** !*

On a :
- l'ensemble $\mathbb{N}$
- et une aplication qui associe une proposition à tout $n \in \mathbb{N}$



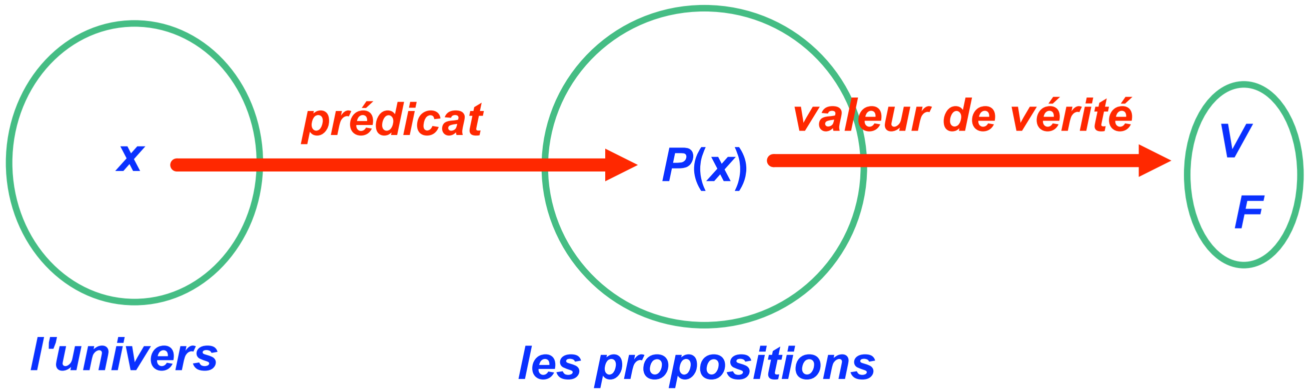
Une telle affirmation s'appelle un ***prédicat***.

On peut voir un ***prédicat*** comme une application qui associe une proposition à chaque élément d'un ensemble, appelé ***univers*** du prédicat.

<u>**Exemples :**</u>

univers	***prédicat***
$\mathbb{N}$	*le nombre **n** est pair*
$\mathbb{R}$	$x > 2$
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	*l'application **f** est bijective*
$\mathbb{R}^2$	$a + b = 5$

Avec la ***valeur de vérité***, on peut aussi voir un ***prédicat*** comme une application qui associe la valeur ***V*** ou ***F*** aux éléments d'un ensemble.



On peut donc aussi voir un ***prédicat*** comme une ***question*** concernant les éléments d'un ensemble.

Exemple :

Prédicat : "*le nombre* ***n*** *est pair* "

Question : "*le nombre* ***n*** *est-il pair ?* "

Poids

Quand l'univers est un ***produit*** d'ensembles, le prédicat apparaît comme une ***fonction de plusieurs variables***.

Le nombre de variables s'appelle le ***poids*** du prédicat.

Exemple : $a+b=5$ est un prédicat de ***poids 2*** sur $\mathbb{R}$: il porte sur les deux variables ***a*** et ***b*** , *mais c'est aussi un prédicat de poids* ***1*** *sur* $\mathbb{R}^2$*, car il porte sur le couple* ***(a,b)*** *…*

Conclusion : la notion de ***poids*** *dépend de l'****univers*** *considéré.*

Quand on a un ***prédicat*** de poids n , on peut donner une valeur fixée à l'une des variables ; on obtient un prédicat de poids

$(n-1)$ (sur un autre univers éventuellement).

Exemple :

$P(a,b): \quad "a+b=5"$ est un prédicat de poids 2 sur $\mathbb{R}$.

On fixe la valeur de a égale à 3, ce qui donne le prédicat :

$Q(b): \quad "3+b=5"$ qui est de poids **1** sur $\mathbb{R}$.

Le ***poids*** du prédicat est le nombre de variables. C'est aussi le nombre de fois où l'on peut ***affecter*** une valeur à une variable.

Une ***proposition***, c'est un prédicat de ***poids 0*** … car il n'y a plus de variable !

Quand on a un ***prédicat*** de poids n , et une nouvelle variable, on peut fabriquer un ***prédicat*** de poids $(n+1)$ dans lequel la nouvelle variable n'a pas d'influence.

Habituellement, on donne le même nom à ce nouveau prédicat.

Exemple : Avec P, le prédicat de poids 1 sur $\mathbb{R}$, défini par :

$P(a): \quad "a>0"$, on fabrique le prédicat P de poids 2 sur $\mathbb{R}$:

$$P(a,b): \quad "a>0"$$

Calcul sur les prédicats

On peut ***combiner*** les prédicats au moyen des ***connecteurs***.

Négation

Si l'on a un prédicat P , le prédicat $\neg P$ est celui qui associe la proposition $\neg\left(P(x)\right)$ à x.

Exemple :

$P(n)$: "*le nombre* n *est pair* "

$\neg P(n)$: "*le nombre* n *n'est pas pair* "

Conjonction

Si l'on a des prédicats P et Q , le prédicat $P \wedge Q$ est celui qui associe la proposition $P(x) \wedge Q(x)$ à x.

Exemple :

$P(n)$: "*le nombre* n *est pair* "

$Q(n)$: "*le nombre* n *est un carré* "

$P \wedge Q(n)$: "*le nombre* n *est pair et le nombre* n *est un carré* "

Disjonction

Si l'on a des prédicats P et Q , le prédicat $P \vee Q$ est celui qui associe la proposition $P(x) \vee Q(x)$ à x.

Exemple : $P(n)$: "*le nombre* n *est pair* "

$Q(n)$: "*le nombre* n *est un carré* "

$P \vee Q(n)$: "*le nombre* n *est pair ou le nombre* n *est un carré* "

Mise en garde

Le nom donné aux ***variables muettes*** n'a pas d'importance mais il faut ***faire attention*** à ne pas donner le même nom à des variables différentes.

Exemple : P : "*le nombre* x *est pair* "

Q : "*le nombre* y *est un carré* "

Leur conjonction pourrait être :

- le prédicat de poids **2** :

  "*le nombre* n *est pair et le nombre* m *est un carré* "

- le prédicat de poids **1** :

  "*le nombre* n *est pair et le nombre* n *est un carré* "

Chapitre 14

Calcul des prédicats
récurrences

1. Prédicats

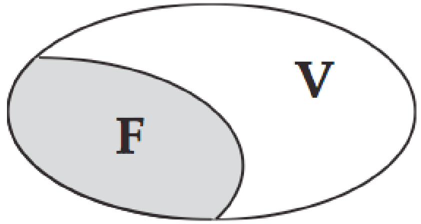
2. Quantificateurs

3. Le principe de récurrence

Quantificateurs

Soit P un quantificateur de poids **1** sur l'univers U.

Il partage l'univers U en deux parties :



L'affirmation :

"*l'ensemble des* $x \in U$ *pour lesquels* $P(x)$ *est vraie est* U *tout entier* " possède une valeur de vérité ⇢ c'est une proposition.

On la note : $\forall x \; P(x)$ et on dit : ***quel que soit x, P(x)***.

Le symbole $\forall$ s'appelle le ***quantificateur universel***.

L'affirmation :

"*l'ensemble des* $x \in U$ *pour lesquels* $P(x)$ *est vraie n'est pas* $\varnothing$" possède une valeur de vérité ⇢ c'est une proposition.

On la note : $\exists x \; P(x)$ et on dit : ***Il existe x, P(x)***.

Le symbole $\exists$ s'appelle le ***quantificateur existentiel***.

Exemple :

L'univers est $\mathbb{N}$, et le prédicat est : "*le nombre* ***n*** *est pair* "

$\forall n\ P(n)$: "*quel que soit* ***n*** *, le nombre* ***n*** *est pair* " Faux

$\exists n\ P(n)$: "*il existe* ***n*** *tel que* ***n*** *est pair* " Vrai

Remarque : Quand l'univers est l'ensemble fini : $U = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$

$\forall e\ P(e)$ dit la même chose que : $P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge \cdots \wedge P(e_n)$

Remarque : Quand l'univers est vide :

$\forall n\ P(n)$ est ***vraie*** $\exists n\ P(n)$ est ***fausse***

Dans un prédicat $P(x)$, on dit que la variable x est ***libre***.

Dans $\exists x\ P(x)$ ou dans $\forall x\ P(x)$ on dit que la variable x est ***liée***.

Quand on a un prédicat P de poids n , on peut lier une variable avec un quantificateur, ce qui donne un prédicat de poids $(n-1)$ et on peut continuer à lier les variables libres restantes.

Exemple : $P(a,b,c)$ est un prédicat de poids 3.

$$Q(a,c) = \exists b\ P(a,b,c)$$

$$R(c) = \forall a\ \exists b\ P(a,b,c)$$

$$S = \forall c\ \forall a\ \exists b\ P(a,b,c)$$

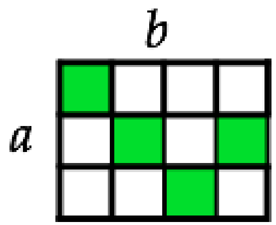
Mise en garde

L'ordre dans lequel on fait ces liaisons a de l'importance !

Exemple :

$P(a,b)$ est un prédicat avec a une variable dans un ensemble A à 3 éléments et b une variable dans un ensemble B à 4 éléments (l'univers est donc AxB) .

Sur le diagramme cartésien de AxB on marque les cases (a,b) pour lesquelles la proposition $P(a,b)$ est vraie.

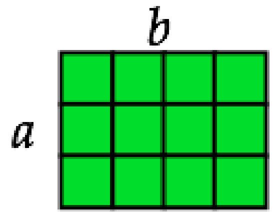


$\boxed{\forall\,\forall}$ La proposition $\forall a\ \forall b\ P(a,b)$
dit que dans chaque ligne toutes les cases sont marquées.

La proposition $\forall b\ \forall a\ P(a,b)$
dit que dans chaque colonne toutes les cases sont marquées.

La proposition $\forall (a,b)\ P(a,b)$
dit que toutes les cases sont marquées.

$\dashrightarrow$ *C'est la même chose !*

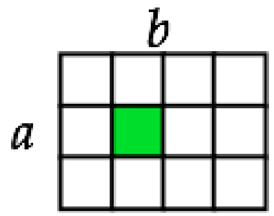


$\boxed{\exists\,\exists}$ La proposition $\exists a\ \exists b\ P(a,b)$
dit qu'il existe une ligne où une case est marquée.

La proposition $\exists b\ \exists a\ P(a,b)$
dit qu'il existe une colonne où une case est marquée.

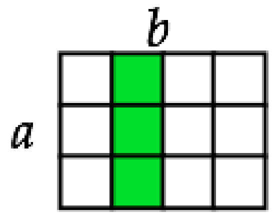
La proposition $\exists (a,b)\ P(a,b)$
dit qu'il existe une case marquée.

$\dashrightarrow$ *C'est la même chose !*



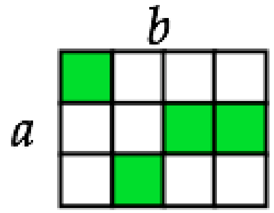
$\boxed{\exists\ \forall}$ La proposition $\exists b\ \forall a\ P(a,b)$

dit qu'il existe une colonne dont toutes les cases sont marquées.



$\boxed{\forall\ \exists}$ La proposition $\forall a\ \exists b\ P(a,b)$

dit que dans chaque ligne il existe une case marquée.



Ce n'est pas pareil !

Tout ce qu'on a, c'est $\big(\exists b\ \forall a\ P(a,b)\big) \rightarrow \big(\forall a\ \exists b\ P(a,b)\big)$

<u>Théorème</u> :

$\neg\big(\forall x\ P(x)\big)$ et $\exists x\ \big(\neg P(x)\big)$ ont la même valeur de vérité.

$\neg\big(\exists x\ P(x)\big)$ et $\forall x\ \big(\neg P(x)\big)$ ont la même valeur de vérité.

<u>Méthode pratique</u>

Pour obtenir un ***synonyme*** de la négation d'une proposition faite en liant les variables d'un prédicat par des quantificateurs, on échange $\exists$ et $\forall$, et on remplace le prédicat par sa négation.

Exemple : $P(a,b) : a+b=5$

$\forall a\ \exists b\ P(a,b)$: "*quel que soit* **a** *, il existe* **b** *tel que* $a+b=5$"

$\neg\left(\forall a\ \exists b\ P(a,b)\right)$: "*il est faux que quel que soit* **a** *, il existe* **b** *tel que* $a+b=5$"

$\exists a\ \forall b\ \left(\neg P(a,b)\right)$: "*il existe* **a** *tel que* $a+b\neq 5$ *quel que soit* **b** "

La suite … ?

On peut aussi se poser des questions du type :

les propositions $\left(\forall x\ P(x)\right)\wedge\left(\forall x\ Q(x)\right)$ et $\forall x\ \left(P(x)\wedge Q(x)\right)$ *ont-elles la même valeur de vérité ?*

Chapitre 14

Calcul des prédicats récurrences

1. Prédicats

2. Quantificateurs

3. Le principe de récurrence

Récurrence

Exemple :

On démontre que, pour tout entier n positif :

$$0+1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

On a un prédicat $P(n)$ et on veut démontrer que la valeur de vérité de $\forall n\ P(n)$ est V.

On démontre cette propriété par ***récurrence***, en utilisant le principe suivant.

Principe d'induction faible

Si $P(0)$ est vraie et si $\forall n\left(P(n)\rightarrow P(n+1)\right)$, alors $\forall n\ P(n)$ est vraie.

$P(0)$ est vraie : $0=\frac{0(0+1)}{2}$ et $\forall n\left(P(n)\rightarrow P(n+1)\right)$

$$0+1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Principe d'induction fort

Si $P(0)$ est vraie et si $\forall n\ \big(\big(P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(n)\big) \rightarrow P(n+1)\big)$
alors $\forall n\ P(n)$ est vraie.

Les deux principes sont équivalents.

Sur quoi repose le principe de récurrence ?

On dit qu'un ensemble ordonné est ***bien ordonné*** si toute partie ***non vide*** admet un ***plus petit élément***.

$\mathbb{N}$ est ***bien ordonné*** …

On démontre le ***principe de récurrence***.

Si $P(n)$ était pas toujours vrai, il y aurait un plus petit élément m pour lequel $P(m)$ est fausse ($\mathbb{N}$ est ***bien ordonné***)

On aurait $m \neq 0$ (parce que $P(0)$ est vraie).

Donc il y aurait un entier $m' = m - 1$ pour lequel $P(m')$ est vraie.

et si $P(m')$ est vraie, alors $P(m'+1) = P(m)$ est vraie !

On démontre une réciproque : si le ***principe de récurrence*** est vrai, alors $\mathbb{N}$ est ***bien ordonné*** …

Le principe de récurrence dit qu'en partant de 0 et en sautant indéfiniment d'un entier à l'autre, on passe en revue tous les entiers.

On a les ***axiomes de Peano***.

L'application $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $s(x) = x + 1$ vérifie :

1. s est ***injective***.
2. Il n'existe pas d'entier x tel que $s(x) = 0$
3. La seule partie $A \subset \mathbb{N}$ telle que $s(A) \subset A$ est $A = \mathbb{N}$

On démontre que ces propriétés caractérisent $\mathbb{N}$

Théorème :

Soient N un ensemble, α un élément de N et $\sigma : N \longrightarrow N$, une application telle que :

1. σ est ***injective***.
2. Il n'existe pas d'élément x tel que $\sigma(x) = \alpha$
3. La seule partie $A \subset N$ telle que $\sigma(A) = A$ est N

Alors, il existe une bijection entre N et $\mathbb{N}$