# Algèbre linéaire

**Exercice 1 :** Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $N = A - I_3$.

1. Calculer $N^2$, $N^3$ et $N^k$ pour $k$ entier naturel strictement positif.
2. Calculer $A^2$ et le comparer avec $(N^2 + 2N + I_3)$.
3. Calculer $A^3$ et le comparer avec $(N^3 + 3N^2 + 3N + I_3)$.
4. Que peut-on en déduire sur $A^k$ pour $k$ entier naturel strictement positif ?

**Exercice 2 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^3 - 2A^2 + 2A$ et en déduire l'inverse de $A$.

**Exercice 3 :** Déterminer les valeurs du paramètre $m$ telles que les systèmes ont une solution unique

$$\begin{cases} x + y + mz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= m \\ 2x + y - z &= 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} mx + y + z &= 1 \\ x + my + z &= 1 \\ x + y + mz &= 1 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x \quad\quad - 3z &= -3 \\ 2x + my - z &= -2 \\ x + 2y + mz &= 1 \end{cases} \tag{3}$$

**Exercice 4 :** Résoudre les systèmes suivants par la méthode d'élimination de Gauss :

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 3w &= 1 \\ 3x + 2y - z + 2w &= 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w &= 5 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13 \\ 2x + 6y + 2z &= 22 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2z & = 10 \\ 3x + 2y + 2z & = 1 \\ 5x + 4y + 3z & = 4 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 6 \\ 2x - y + 4z & = 2 \\ 4x + 3y - 2z & = 14 \end{cases} \tag{7}$$