Transformée de Laplace

Exercice 1 : oit $u(t)$ la fonction définie par

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Exercice 1 : Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

(i) $\sin(\omega t)u(t)$

(ii) $\cos(\omega t)u(t)$

(iii) $\sin(t)\cos^2(t)u(t)$

(iv) $\cos(at+b)u(t)$

(v) $e^{2t}\sinh(3t)u(t)$

(vi) $\begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 1 \\ 2-t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$

Exercice 2 : Trouver les fonctions dont les transformées inverses de Laplace sont les suivantes :

(i) $\dfrac{3p+2}{p(p+1)}$

(ii) $\dfrac{7}{(p-1)^3}$

(iii) $\dfrac{-p^2+2p-4}{p^3-p^2+2p-2}$

(iv) $\dfrac{1}{(p+3)^2-4}$

(v) $\dfrac{4p-2}{p^2-6p+18}$

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide de la transformée de Laplace :

(i) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

$$(ii)\quad \begin{cases} y'' - y' - 6y = 0 \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

$$(iii)\quad \begin{cases} y'' - y' + 2y = \cos(3t) - 17\sin(3t) \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 6. \end{cases}$$