Transformée de Fourier

Exercice 1 : Soient $\alpha > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $\mathbb{I}_{[a,b]}$ la fonction définie par

$$\mathbb{I}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

(i) $\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$

(ii) $\mathbb{I}_{[-a,a]}(x)$

(iii) $x\mathbb{I}_{[-a,a]}(x)$

(iv) $e^{-\alpha x}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$

(v) $e^{\alpha x}\mathbb{I}_{]-\infty,0]}(x)$

(vi) $e^{-\alpha|x|}$

(vii) $\text{sign}(x)e^{-\alpha|x|}$

(viii) $\dfrac{1}{1+x^2}$

(ix) $\cos(x)\mathbb{I}_{[-\pi,\pi]}(x)$

(x) $\sin(x)e^{-x}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$

Exercice 2 :
Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx,$$

en utilisant la Formule de Parseval.

Exercice 3 : Résoudre à l'aide des transformées de Fourier l'Équation de Schrödinger :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -i\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} & \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}, t \in]0, \infty[\\ \psi(x,0) = \varphi(x) & \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$