Séries de Fourier

Exercice 1 : Donner les coefficients de Fourier des fonctions 2π-périodique

(i) $\sin(3x), \qquad x \in [-\pi, \pi]$,

(ii) $\sqrt{2} + \sin(-2x) + \cos(5x), \qquad x \in [-\pi, \pi]$.

Exercice 2 : On considère f la fonction 2π-périodique, paire, définie par :

$$f(x) = x, \quad x \in [0, \pi].$$

1. Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(f)$ de f et montrer que

$$S(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{p \geq 0} \frac{4}{\pi(2p+1)^2} \cos((2p+1)x).$$

2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série.

3. Déduire de ce qui précède les sommes des séries numériques :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$,
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$, (on utilisera la Formule de Parseval)
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$,

Exercice 3 : On considère f la fonction 2π-périodique, paire, définie par :

$$f(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

1. Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(f)$ de f et montrer que

$$S(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série.

3. Déduire de ce qui précède les sommes des séries numériques :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 4 : On considère la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in (-\pi, \pi].$$

1. Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(f)$ de f;
2. Étudier la convergence de cette série (simple et uniforme);
3. Calculer les valeurs des séries numériques :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

Exercice 5 : On considère la fonction 2π-périodique, impaire définie par :

$$h(x) = x(\pi - x), \quad x \in [0, \pi].$$

1. Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(h)$ de h;
2. Étudier la convergence de cette série (simple et uniforme);
3. Calculer les valeurs des séries numériques :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Exercice 6 : On considère, pour $a > 0$, la fonction 2π-périodique définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & x \in]-\pi, 0[, \\ \cosh(ax) & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

1. Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(\phi)$ de ϕ;
2. Étudier la convergence de cette série (simple et uniforme);
3. Calculer les valeurs des séries numériques :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2+n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2+n^2}.$$