Séries entières

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence R des sèries entières suivantes et étudier, le cas échéant, la série quand $|x| = R$

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n + n} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}\log(n)}{n^2+1} x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n n x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2+(-1)^n)^n} x^n$

f) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{5^n}{n+1} x^{2n+1}$

g) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^n x^n}{n!}$ (utiliser Stirling [1])

h) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad \text{avec } a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3p \\ 2^{2p+1} & \text{si } n = 3p+1 \\ 2^{2p+2} & \text{si } n = 3p+2 \end{cases}$

Exercice 2 : En utilisant un critère de comparaison, déterminer le rayon de convergence R des sèries entières suivantes

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2-2n+2}\right) x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\left(1+\frac{n}{e^n}\right)^{n^2+1} - 1\right) x^n$

Exercice 3 : Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n(n-1) x^{n-2}$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$

Exercice 4 : Donner le rayon de convergence des séries entières de la variable réelle x suivantes et calculer leur somme : [2]

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+n+1}{n} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \cosh(n) x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{5^n}{2^{2n+1}} x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (n^2+n+1) x^n$

f) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n}{2^{2n}} x^{2n+1}$

1. Formule de Stirling : $n! = \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \dfrac{1}{12n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$
2. Utiliser les résultats de l'Exercice 3