Séries numériques

Exercice 1 : séries à termes positifs
Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ de terme général u_n tel que :

$a)\ u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^{2n}$

$b)\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$c)\ u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$

$d)\ u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

$e)\ u_n = \dfrac{2+\cos(n)}{n}$

$f)\ u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$

$g)\ u_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

$h)\ u_n = e^{-\sqrt{n^2-1}}$

$i)\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \log\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\ell)\ u_n = \dfrac{\log n}{n^2}$

Exercice 2 : série géométrique et série téléscopique
Après avoir démontré la convergence, calculer la somme des séries suivantes :

$a)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ $\qquad b)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ $\qquad c)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3-n}$

Exercice 3 : séries à termes quelconques
Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ de terme général u_n tel que :

$a)\ u_n = \dfrac{-5}{6n-1}$

$b)\ u_n = (-1)^n \left(e^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1\right)$

$c)\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{\log n}$

$d)\ u_n = (-1)^n \sqrt{n} \left(e^{1/n} - 1\right)$

$e)\ u_n = \dfrac{1}{2+(-1)^n n}$

$f)\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$

$g)\ u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)$

$h)\ u_n = \dfrac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

$i)\ u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

Exercice 4 : séries avec paramètres
Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ de terme général u_n tel que :

$a)\ u_n = a^{-n^2} e^{\sqrt{n}\log n}, \quad$ pour $a > 0$;

$b)\ u_n = \dfrac{1}{n^\alpha e^{\beta n}}, \quad$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$c)\ u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \cos\left(\dfrac{\pi n}{4}\right), \quad$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$;

$d)\ u_n = \dfrac{e^{in\pi/3}}{n^\alpha} \cos(n\,\theta), \quad$ pour $\alpha \geq 0, \theta \in [-\pi, \pi]$,