

Suites numériques

Exercice 1 : Étudier les suites suivantes, et donner leur limite lorsqu'elles convergent :

$$a) \frac{(-1)^n}{4n-1}$$

$$b) \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{7\pi n}{2}\right)$$

$$c) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{n}\right)$$

$$d) \sin\left(\frac{7\pi n}{2}\right)$$

$$e) \frac{3n+4}{9+2n}$$

$$f) \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^2}$$

$$g) \frac{e^n}{n^3}$$

$$h) \frac{(\log n)^2}{n}$$

$$i) \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Exercice 2 : Étudier les suites suivantes définies par récurrence :

$$a) u_{n+1} = \sin(u_n) \text{ et } u_0 = 1 ;$$

$$b) u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \text{ et } u_0 = 1.$$

Exercice 3 (La suite de Fibonacci) : On considère le problème suivant :

Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? (Leonardo Pisano, Liber Abaci, 1202).

Soit F_n le nombre de couples de lapins au mois n . Sachant que :

1. le premier mois il y a qu'un couple de lapins, donc $F_1 = 1$;
2. à partir du troisième mois de son existence, chaque couple engendre un nouveau couple par mois ;
3. les lapins ne meurent jamais,

alors

- a) calculer F_{12} ;
- b) donner une formule par récurrence pour le terme général F_n ;
- c) étudier la convergence de la suite F_n .