ED 6
Méthodes itératives

Objectifs :
- maitriser quelques méthodes itératives simples
- démontrer des résultats de convergence pour ces métodes

Exercice 1. Méthode de Gauss itérative
Lors de la factorisation LU d'une matrice inversible A, on trouve du fait des erreurs d'arrondi deux matrices L' et U' telles que :

$$L'U' = A + E$$

On résout donc le système :

$$(A + E)x' = b$$

au lieu de :

$$Ax = b$$

1. On considère une norme matricielle telle que $||I|| = 1$ et l'on suppose que $||A^{-1}||.||E|| < \frac{1}{2}$. Vérifier que $A + E$ est inversible.
2. On construit la suite $x^{(k)}$ telle que :

$$x^{(0)} = x'$$
$$(A + E)\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right) = b - Ax^{(k)}$$

   On note $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x$ l'erreur à l'étape k.
   Vérifier que $\varepsilon^{(k+1)} = \left(I - (A + E)^{-1} A\right) \varepsilon^{(k)}$
3. En déduire que si $x^{(k)}$ tend vers x, solution du problème.

Exercice 2. Méthode du gradient à pas constant
Soit A une matrice symétrique définie positive. On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}^n$ le système linéaire $Ax = b$, en construisant une suite de vecteurs $x^{(k)}$ telle que :

$x^{(0)}$ donné (initialisation).
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \widetilde{\rho}\left(Ax^{(k)} - b\right)$$

ou $\widetilde{\rho}$ est un réel à déterminer.

1. On note $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x$ l'erreur sur la solution x.
   Donner le système linéaire dont $\varepsilon^{(k)}$ est solution.
   En déduire une condition pour que $\varepsilon^{(k)}$ tende vers 0 (autrement dit que la méthode converge vers la solution)
2. En majorant $||\varepsilon^{(k)}||_2^2$, déduire un intervalle de convergence pour $\widetilde{\rho}$ puis déterminer le $\widetilde{\rho}$ optimal.
3. En partant cette fois ci de la condition obtenue en (1) ($\widetilde{\rho}(I - \widetilde{\rho}A) < 1$) obtenir un autre intervalle de convergence pour $\widetilde{\rho}$ ainsi qu'un nouveau $\widetilde{\rho}$ optimal.
4. Comparer et discuter les deux approches. Y-a-t-il contradiction ?

Exercice 3. Soit A une matrice symétrique réelle définie positive. On associe à A la décomposition suivante :

$$A = D - E - F$$

ou D est la diagonale de A, E la partie strictement triangulaire supérieure de A et F sa partie strictement triangulaire inférieure.
Pour résoudre le système $Ax = b$ dans $\mathbb{R}^n$ on utilise la méthode itérative suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (D-E)x^{(k+1/2)} & = & Fx^{(k)} + b \\ (D-F)x^{(k+1)} & = & Ex^{(k+1/2)} + b \end{array} \right. \tag{1}$$

1. Justifier le fait que A est inversible. Quelle relation existe-t-il entre E et F ? Pourquoi D est-elle inversible ? En déduire que la méthode (1) a bien un sens, c'est à dire que $(D - E)$ et $(D - F)$ sont inversibles.
2. Si l'on remplace la méthode (1) par :
   $$(D - E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$$
   quelle méthode itérative obtient-on ?
3. Vérifier que (1) peut s'écrire :
   $$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \tag{2}$$
   avec $B = (D - F)^{-1}E(D - E)^{-1}F$ et c un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à préciser.
4. On se place dans le cas particulier où $D = I$.
   (a) En développant $(I - E)(I - E)^{-1}$ et $(I - E)^{-1}(I - E)$ vérifier que $E(I - E)^{-1} = (I - E)^{-1}E$.
   (b) En utilisant le résultat précédent, en déduire que $B = M^{-1}N$ où M et N sont des matrices que l'on précisera.

(c) Vérifier que M est symétrique définie positive et que N est symétrique semi-définie positive.

5. On se place maintenant dans le cas général avec D quelconque.
   (a) Vérifier qu'il existe une matrice Δ inversible définie positive telle que $B = \Delta\Delta$.
   (b) On pose $E^* = \Delta^{-1}E\Delta$ et $F^* = \Delta^{-1}F\Delta$ ainsi que $y = \Delta x$ et $b^* = \Delta^{-1}b$. Montrer que les relations (1) peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{lll} (I - E^*)y^{(k+1/2)} & = & F^*y^{(k)} + b^* \\ (I - E*)y^{(k+1)} & = & E^*y^{(k+1/2)} + b^* \end{array} \right.$$

   (c) Vérifier que M est symétrique définie positive et que N est symétrique semi-définie positive.
   (d) En déduire la convergence de la méthode (1) dans le cas général.
6. Monter que $\rho(B) < 1$.