ED 5
Normes et conditionnement

Objectifs :
- maitriser les notions de rayon spectral et de norme pour les matrices
- comprendre ce qu'est le conditionnement d'un système linéaire

Exercice 1. Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice $N \times N$ (réelle ou éventuellement complexe, λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ tel que $\max\limits_{i=1,\cdots,N} |x_i| = 1$.

1. Montrer que :
$$\forall i \in \{1, \cdots, N\},\ |\lambda - a_{ii}||x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}||x_j|$$
Indication : écrire $AX = \lambda X$ composante à composante.
2. Montrer qu'il existe au moins un indice k tel que :
$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$$
3. En déduire que si λ est valeur propre de A, λ appartient à la réunion des disques D_k du plan complexe définis par :
$$D_k = \left\{ z \in \mathbb{C},\ |z - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \right\}$$
Remarque : il s'agit du théorème de Gerschgorin.
Appliquer ce résultat à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
4. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors :
$$\lambda \in \cup_k D'_k \text{ avec } D'_k = \left\{ z \in \mathbb{C},\ |z - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{jk}| \right\}$$

5. Montrer que le rayon spectral de A vérifie la relation :

$$\rho(A) \leq \max_k \sum_{j=1}^{N} |a_{kj}|$$

Indication : $|a| \leq |a-b| + |b|$.

6. Montrer que si la matrice A est à diagonale strictement dominante [1] alors A est inversible. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2. Soit A une matrice réelle quelconque.

1. Vérifier que $\overline{A}A$ est symétrique, positive [2] et que :
$\overline{A}A$ définie positive [3] $\Leftrightarrow$ A inversible.
2. Montrer que $||A||_2 = \sqrt{\rho\left(\overline{A}A\right)}$
Rappel : $||A||_2 = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{||Ax||_2}{||x||_2}$.
3. Que se passe-t-il si A est symétrique ? Que vaut alors $||Ax||_2$?
4. Soit U une matrice orthogonale [4], calculer $||U||_2$ et montrer que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ ||AU||_2 = ||UA||_2 = ||A||_2$$

Exercice 3. Norme euclidienne des matrices
Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice réelle. On pose :

$$||A||_E = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Montrer que $||.||_E$ est une norme matricielle.
2. Est-ce une norme subordonnées ?
3. Montrer que $||A||_E = \sqrt{\mathrm{tr}\left(\overline{A}A\right)} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(A\overline{A}\right)}$
En déduire que $||A||_2 \leq ||A||_E \leq \sqrt{N}||A||_2$
Remarque : ceci est la démonstration de l'équivalence de ces deux normes. Pour un espace normé de dimension fini ce résultat se généralise : toutes les normes sont alors équivalentes.

---

1. $\forall k \in \{1, \cdots, \},\ |a_{kk}| > \sum_{j\neq k} |a_{kj}|$
2. A positive $\Leftrightarrow (x, Ax) \geq 0,\ \forall x$
3. A définie postive $\Leftrightarrow (x, Ax) > 0,\ \forall x$
4. $\overline{U}U = U\overline{U} = I$

4. Soit U une matrice orthogonale, calculer $||U||_E$ et montrer que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ ||AU||_E = ||UA||_E = ||A||_E$$

Exercice 4. Conditionnement d'un système linéaire
On veut résoudre dans $\mathbb{R}^n$ le système linéaire $Ax = b$, avec A inversible. A partir du moment ou l'on résout ce système sur machine ou que les données de A ou b proviennent de mesures, il y a des erreurs commises sur A et b (erreurs de troncature, d'arrondis, ... issues de la représentation des nombres en machine et/ou erreurs dues à la précision des mesures). Autrement dit on résout en fait un système légèrement perturbé :

$$(A + \delta A)y = b + \delta b$$

Soit x la solution exacte de $Ax = b$ et $y = \delta x + x$, le système précédent s'écrit :

$$(A + \delta A)(\delta x + x) = b + \delta b$$

Le but de l'exercice est d'évaluer l'erreur relative commise sur la solution $\dfrac{||\delta x||}{||x||}$ en fonction des données. Si cette erreur est importante pour de petites perturbation le système est dit mal conditionné.

1. Etape 1 : on considère le système perturbé suivant :

$$A(\delta x + x) = (b + \delta b)$$

Evaluer $\dfrac{||\delta x||}{||x||}$ en fonction de $\dfrac{||\delta b||}{||b||}$

2. Etape 2 : on considère le système perturbé suivant :

$$(A + \delta A)(\delta x + x) = b$$

Vérifier que $\dfrac{||\delta x||}{||x + \delta x||} \leq ||A||.||A^{-1}||\dfrac{||\delta A||}{||A||}$

Remarque : le nombre $||A||.||A^{-1}||$ est noté $\mathrm{Cond}A$ et s'appelle conditionnement de la matrice A. Bien sûr il dépend de la norme choisie. Pour toute norme telle que $||I|| = 1$ on a $\mathrm{Cond}A \geq 1$.

3. Cas général : on considère une norme matricielle telle que $||I|| = 1$ et on suppose que $||A^{-1}||.||\delta A|| < 1$. Montrer que la solution du système perturbé complet :

$$(A + \delta A)(\delta x + x) = b + \delta b$$

vérifie :

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \frac{\mathrm{Cond}A}{1 - ||A^{-1}||.||\delta A||}\left(\frac{||\delta b||}{||b||} + \frac{||\delta A||}{||A||}\right)$$

On note $\mathrm{Cond}_2(A) = ||A||_2.||A^{-1}||_2$ le conditionnement associé à la norme 2. Vérifier que :

1. $\mathrm{Cond}_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ pour toute matrice A symétrique réelle (λ_{max} et λ_{min} représentent respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs propre de A).
2. $\mathrm{Cond}_2(U) = 1$ pour toute matrice orthogonale U.

Exemple : on considère le système $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Etudier la réponse du système à une perturbation du second membre $\delta b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$
2. Etudier la réponse du système à une perturbation des coefficients du système $\delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}$
3. Calculer $\mathrm{Cond}_2(A)$