ED 4
Applications linéaires, diagonalisation

Objectifs :

- savoir déterminer les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme
- savoir passer d'une base à une autre (pour les matrices représentatives d'une application linéaire)

Exercice 1. Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factoriser le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Expliquer sans calcul pourquoi la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. Déterminants de Vandermonde

Soient $a_1, \ldots, a_n \in K$. Le déterminant de Vandermonde associé aux a_i est : $V(a_1, \ldots, a_n) = \det\left(a_i^{j-1}\right)$.

1. Calculer et factoriser $V(a, b)$ et $V(a, b, c)$.
2. Pour $x \in K$, montrer que $V(a_1, \ldots, a_n, x) = V(a_1, \ldots, a_n) \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$.
3. En déduire l'expression générale de $V(a_1, \ldots, a_n)$.

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$
Justifier.
2. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A et calculer ses racines λ_1 et λ_2.
3. Soit $R_n(X) = a_n X + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1 et λ_2).
4. Montrer que $A^n = a_n A + b_n I_2$, en déduire que la matrice A^n converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on déterminera. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 7. Soient M et A deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$. On suppose que M admet n valeurs propres distinctes.

1. Soit x un vecteur propre de M de valeur propre λ, montrer que $MAx = \lambda Ax$, en déduire que les vecteurs x et Ax sont colinéaires, puis que tout vecteur propre de M est un vecteur propre de A.
2. On note maintenant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de M et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ celles de A.
   (a) Montrer que le système
   $$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ \vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{cases}$$
   admet une unique solution $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

(b) Soient M' et A' les matrices diagonales suivantes :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$

et en déduire qu'il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

Exercice 8. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A - I)^2$. Montrer que $A^n = nA + (1 - n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient $P(X) = (X - 1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q. En remarquant que $P(A) = 0$ et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver A^n.
4. (a) Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme $u - \mathrm{Id}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, on notera ε_2 une base.
   (b) Déterminer un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Déterminer un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.
   (c) Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.Ecrire la matrice de u dans cette base, ainsi que les matrices de passage.
   (d) Retrouver A^n.