ED 3
Espaces vectoriels

Objectifs :

- savoir déterminer si un ensemble est ou non un espace vectoriel
- savoir déterminer si une famille de vecteur est libre, génératrice ou constitue une base
- savoir passer d'une base à une autre

Exercice 1. Donner des exemples d'espaces vectoriels de dimension finie et de dimension infinie.

Exercice 2. Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y+a=0, \text{ et } x+3az=0\right\}$$
$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(1)=0\}, \qquad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(0)=1\}$$
$$E_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P' = 3\}, \qquad E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x+\alpha y+1 \geqslant 0\right\}.$$

Exercice 3. L'ensemble $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ est-il un espace vectoriel ? Si oui préciser sa dimension et en donner une base.

Exercice 4. Soit $E = \{P \in \mathbf{R}[X], degP = n\}$. E est-il un espace vectoriel. Si oui donner sa dimension ainsi qu'une base. Même question avec $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 5. Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $V_1 = (0,1,2,3)$, $V_2 = (1,2,3,4)$ et $V_3 = (2,3,4,5)$.

Exercice 6. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E, montrer que : $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$.

Indications 6. Partir d'une base de $F \cap G$ et compléter cette base.

Exercice 7. Montrer que les vecteurs $\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 8.

1. Montrer que les vecteurs $x_1 = (0, 1, 1)$, $x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x = (1, 1, 1)$.
2. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
3. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

Exercice 9. On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x, y, z est-elle libre ?
2. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est-elle libre ?

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $A_p(X) = (X - a)^p$ et $B_p(X) = X^p$.

1. Montrer que $\varepsilon = \{A_0, \ldots, A_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) A_k(X)$. (On pourra montrer que l'ensemble E des élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui satisfont à cette égalité est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et contient une base.)