

ED 1

Les systèmes linéaires

Objectifs :

- savoir résoudre un système linéaire de dimension quelconque par la méthode de Gauss
- savoir résoudre les systèmes linéaires à 2x2 et 3x3 en utilisant les déterminants

Ex. 1 : Les différents types de solutions

Donner des exemples de systèmes, au moins de dimension 2x2, ayant :

1. une solution unique
2. une infinité de solutions
3. pas de solutions

Ex. 2 : Utilisation de la méthode de Gauss

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de Gauss :

$$1. \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y - 5z = 1 \\ 8x - 9y + 13z = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 2x + 6y + z = 3 \\ 3x + 8y + 2z = 4 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x + y - z = 5 \\ 5x + 6y - 3z = 28 \\ 9x + 11y - 5z = 52 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & - 5x_5 = 2 \\ & x_2 + x_3 & - x_5 = -1 \\ & x_2 + x_3 + x_4 & - x_5 = -1 \\ 2x_1 & - 4x_3 + x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

Ex. 3 : Utilisation des déterminants

Résoudre les systèmes suivants en utilisant les déterminants :

$$1. \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x - 6y = 12 \\ -2x + 3y = -6 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ x + 3y - z = 8 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Ex. 4 : Système avec un nombre arbitraire d'inconnues

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 1 \end{cases}$$

Ex. 5 : Système dépendant d'un ou de plusieurs paramètres

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Attention il faudra distinguer plusieurs cas en fonction des valeurs que peuvent prendre a et b .