Résolution numériques des équations différentielles - III

Objectifs :

- programmer les méthodes d'Euler et Runge-Kutta d'ordre 4 pour un système différentiel
- programmer la méthode d'Euler simplectique (méthode semi implicite) pour un sytsème différentiel d'ordre 2

1 Système différentiel relatif à une équation différentielle d'ordre supérieur à 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, ..., y', y, t) \tag{1}$$

Montrer que l'on peut écrire l'équation 1 sous la forme d'un système de n équations différentielles d'ordre 1 du type :

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = ... \\ ... \\ Y_n' = f(...) \end{cases}$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ ... \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix}$$

Où sous forme plus compacte $Y' = F(Y, t)$.

2 Résolution des système différentiels

On considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

1. Ecrire le système différentiel relatif à l'équation (2). Ne pas oublier la condition initiale.
2. Adapter les fonctions `euler_explicite`, `RK4` et `f` déjà programmées à la résolution des systèmes différentiels. *Remarque* : dans ce TP nous n'étudierons que des équations où $F = F(Y)$, il sera donc inutile de passer le temps t à la fonction `f`
3. Résoudre le système pour $t \in [0, 2\pi]$ en utilisant les schémas d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4. Pour chaque schéma, tracer la courbe $(Y_1(t), Y_2(t))$. Que remarque-t-on ?
4. Ce système correspond à l'évolution d'un oscillateur harmonique (ou pendule linéarisé) et sa solution est périodique de période 2π. Reprendre la question précédente mais cette fois-ci avec $t \in [0, 20\pi]$.

3 Conservation de l'énergie : schémas symplectiques

En fait l'équation étudiée en 2 fait partie d'une classe de problèmes provenant de la mécanique qui se mettent sous la forme (en dimension 1) :

$$\begin{cases} y_1' = -\dfrac{\partial H(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ y_2' = \dfrac{\partial H(y_1, y_2)}{\partial y_1} \end{cases} \tag{3}$$

La particularité de ces système est que le Hamiltonien, H, est conservé au cours de l'évolution. Au niveau mécanique ceci correspond à la conservation de l'énergie.
Lorsque de l'on intègre des systèmes de ce type il est préférable d'adopter un schéma pour lequel H reste borné.

1. Le système d'équations correspondant au pendule fait partie de cette classe et le Hamiltonien associé est $H(t) = \frac{1}{2}\left(y_1^2(t) + y_2^2(t)\right)$. Ecrire une fonction `energie_pendule` qui renvoie un vecteur contenant les valeurs de $H(t)$ à partir de la solution approchée du système. Tracer les fonctions $H(t)$ avec $t \in [0, 4\pi]$ à partir des solutions obtenues avec les schémas d'Euler explicite et Runge Kutta d'ordre 4. Qu'observe-t-on ?
2. Pour remédier au problème détecté à la question précédente nous allons

implémenter le schéma suivant, dit Euler symplectique :

$$\begin{cases} y_1^{n+1} = y_1^n - \Delta t \dfrac{\partial H(y_1^{n+1}, y_2^n)}{\partial y_2} \\ y_2^{n+1} = y_2^n + \Delta t \dfrac{\partial H(y_1^{n+1}, y_2^n)}{\partial y_1} \end{cases} \tag{4}$$

Ce schéma est semi-implicite (il n'est implicite qu'en la variable y_1).

3. En adaptant les fonctions déjà réalisées programmer une fonction `euler_symplectique`. Bien entendu il faudra aussi créer une fonction `newton` pour résoudre l'équation implicite contenue dans le schéma. Heureusement pour ce schéma particulier il s'agit d'une fonction d'une variable et vous pourrez donc réutiliser ce qui a déjà était fait lors de l'ED EDO2.
4. Tester votre fonction `euler_symplectique` en traçant courbe $(Y_1(t), Y_2(t))$ pour $t \in [0, 20\pi]$. Pour $t \in [0, 20\pi]$, comparer la fonction $H(t)$ obtenue avec ce schéma à celle obtenue avec Runge Kutta d'ordre 4.
5. Reprendre la question précédente pour le pendule réel dont le Hamiltonien est $H = \frac{y_2^2}{2} + 1 - \cos(y_1)$.