MVA101 – CNAM – Nathalie Zanon
ED 9: Transformation de Fourier

Exercice 1

Déterminer la TF des fonctions suivantes :

1. f(x) = $1_{[a,b]}(x)$
2. f(x) = x $1_{[a,b]}(x)$
3. f(x) = sin(2πx) $1_{[-1;1]}(x)$ et g(x) = cos(2πx) $1_{[-1;1]}(x)$
4. f(x) = exp (-|x|)
5. f(x) = $1_{[-1;1]}(x)$ + x$1_{[1;2]}(x)$
6. f(x) = exp(-x). $1_{]0;+\infty[}(x)$
7. f(x) = = sin(2πx) exp (-2πx) $1_{]0;+\infty[}(x)$

Exercice 2

Exprimer *F(g)* en fonction de *F(f)* pour les fonctions *g* suivantes :

1. *g(t) = f (-t)*
2. *g(t)* = complexe conjugué de *f(t)*
3. *g(t) = f(t-τ)*
4. *g(t) = exp* (2i*πat*). *f (t), a* réel quelconque
5. *g(t) = f(at), a* réel non nul

Sachant $F(\dfrac{1}{1+t^2})(\nu) = \pi \exp(-2\pi\,|\nu|)$, calculer $F(\dfrac{1}{b^2+(t-a)^2})(\nu)$,
où *a* est un réel quelconque et *b* > 0

Exercice 3

Soit g la fonction impaire définie par g(t) = exp(-t) si t>0

1. Tracer le graphe de g

2. Calculer F(g)

3. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(mx)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}\exp(-m)$ si m > 0

   Expliquer pourquoi ce résultat n'est pas valable pour m = 0

Exercice 4

Que peut-on dire sur la transformée de Fourier d'une fonction réelle et paire ? d'une fonction réelle et impaire ?

Exercice 5

Soit f le signal gaussien défini par f(t) = exp $(-\pi t^2)$

1. Calculer la dérivée de F(f) en fonction de F(f)
2. Que peut-on en déduire pour F(f) ?
3. Utiliser tous les théorèmes possibles pour déterminer la constante encore inconnue et trouver F(f)
4. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2)\, dt$
5. En déduire F($\exp(-at^2)$) pour a>0 et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-at^2)\, dt$
6. Soit λ un réel strictement positif et f_λ la fonction définie par $f_\lambda = \dfrac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{t^2}{2\lambda^2})$

   En utilisant la TF de f_λ, montrer que si λ et μ sont deux réels > 0, alors il existe γ>0 tel que $f_\lambda * f_\mu = f_\gamma$ On exprimera γ en fonction de λ et μ

Exercice 6

1. Sachant F(exp(-a|t|) (ν) = $\dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$ pour tout a>0, calculer $\overline{F}(\dfrac{1}{1+\nu^2})$
2. En déduire F ($\dfrac{1}{1+t^2}$)
3. Calculer alors F ($\dfrac{1}{2-2t+t^2}$) et F ($\dfrac{t}{(1+t^2)^2}$) en minimisant les calculs

Exercice 7

Après avoir justifié son existence, calculer grâce à la transformation de Fourier, le produit de convolution $\dfrac{\sin(\pi a x)}{\pi x} * \dfrac{\sin(\pi b x)}{\pi x}$, où a et b sont deux réels positifs

Exercice 8

Soit $\theta > 0$ et f la fonction paire, nulle pour $|x| > \theta$ et égale à $1- x/\theta$ pour $0 \leq x \leq \theta$

1. Tracer la courbe représentative de f
2. calculer l'énergie de f
3. Calculer <T> l'étalement temporal de f, défini par son carré $<T>^2 = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}$
4. Calculer la transformée de Fourier de f
5. En utilisant le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$, calculer l'étalement spectral de f , noté <F> et

   défini par son carré $<F>^2 = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 |F(f)(u)|^2 du}{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)(u)|^2 du}$
6. Que peut-on dire de <F>.<T> ?
7. Soit h la fonction périodique de période 2 θ qui coïncide avec f sur $[-\theta ; \theta[$.
   Développer h en série de Fourier en précisant les convergences.
8. Calculer les sommes $\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2q+1)^4}$ et $\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2q+1)^2}$

Exercice 9

Soit f la fonction paire définie par $f(t) = 1-t$ si $0 \leq t \leq 1$ et $f(t) = 0$ si $t > 1$

1. Tracer f
2. Calculer $F(f)$
3. Montrer que, pour toute fonction paire g, on a

   $$\overline{F}(g)(t) = 2\int_0^{+\infty} \cos(2\pi\nu t) g(\nu) d\nu = F(g)(t)$$
4. Déduire des résultats précédents la Transformée de Fourier des fonctions suivantes :

   $h(t) = (\frac{\sin \pi t}{\pi t})^2$ et $j(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$
5. En déduire les intégrales suivantes :

   $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt$