MVA101 – CNAM- Nathalie Zanon

ED 8: transformation de Laplace

Exercice 1

On note u la fonction de Heaviside, dite aussi ‘échelon unité’, définie par :

$u(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $u(t) = 0$ si $t < 0$.

Pour chacune des fonctions suivantes, donner la transformée de Laplace et l'abscisse de sommabilité.

1. $f(t) = (t^2 - 3t + 1).u(t)$
2. $g(t) = \cos^2 t.u(t)$
3. $h(t) = sh(at).u(t)$, a appartenant à R
4. $i(t) = u(t)/t$

Exercice 2

Rappeler ou retrouver l'expression, en fonction de la transformée de Laplace de f, des transformées de Laplace des fonctions suivantes:

1. $\exp(at).f(t)$
2. $f(t-b)$, où $b>0$
3. $f(kt)$, k réel non nul

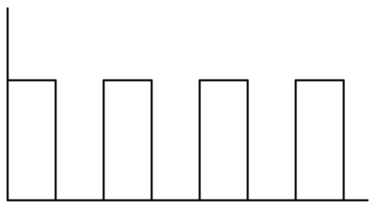
En déduire la transformée de Laplace de $\exp(-4t).\cos(3t).u(t)$, en sachant que $L(\cos t.u(t))(p) = p/(p^2+1)$ pour $\mathrm{Re}\,p>0$

Exercice 3: Transformée de Laplace d'une fonction causale pseudo-périodique

Soit f causale et T-périodique sur R^+, de motif $f_\circ$ défini par

$f_\circ(t) = f(t)$ sur $[0;T]$ et $f_\circ(t) = 0$ ailleurs

1. Exprimer f en fonction de $f_\circ$
2. En déduire la relation entre $F = L(f)$ et $F_\circ = L(f_\circ)$
3. Application au calcul de la TL de la fonction créneau suivante:



Exercice 4 : Transformée de Laplace inverse

Déterminer la TL inverse des fonctions suivantes :

1. $F(p) = \dfrac{1}{p^3} - \dfrac{4}{p+1}$
2. $G(p) = \dfrac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
3. $H(p) = \dfrac{p+1}{p^3(p^2-4)}$

Exercice 5 : Equation différentielle

Résoudre par la TL l'équation différentielle y"(t) + y(t) = u(t)
1. avec les conditions initiales y(0) = y'(0) = 0
2. avec les conditions initiales y(0) = 3 et y'(0) = 2

Exercice 6: Equation différentielle

Résoudre par la TL l'équation différentielle y'(t) + 2y(t) = (2t-3).u(t),
avec la condition initiale y(0) = $y_\circ$

Exercice 7 : Système différentiel

Résoudre par la TL le système différentiel : x'(t) = x + 5y et y'(t) = x – 3y
avec x(0) = 1 et y(0) = 2

Exercice 8

On considère le système qui transforme un signal d'entrée e(t) en un signal de sortie s(t).
On suppose que e et s sont deux signaux causaux et de classe C^2 sur R^*_+, et qu'ils vérifient l'équation:

s"(t) – 5 s'(t)+ 6s(t) = e(t) pour tout t>0,
avec les conditions initiales $s(0_+) = 1$ et $s'(0_+) = 1$

1. En utilisant la TL, exprimer s en fonction de e au moyen d'une intégrale

2. Calculer s(t) dans le cas où le signal d'entrée e(t) est donné par :
   e(t) = 0 si t < 0 ou t > 1 et e(t) = 1 si $0 \leq t \leq 1$

Exercice 9

1. On considère la porte $1_{[a;b]}$, $0 < a < b$. Déduire sa transformée de Laplace de celle de l'échelon unité u. Vérifier le résultat par un calcul direct.

2. Soit f et g les fonctions en escalier définies respectivement par :

$f(t) = 0$ si $t < -1$ ou $t > 1$
et $f(t) = 2$ si $-1 < t < -½$
et $f(t) = 3$ si $-½ < t < ½$
et $f(t) = 2$ si $½ < t < 1$

$g(t) = 0$ si $t < 1$ ou $t > 4$
et $g(t) = 1$ si $1 < t < 2$
et $g(t) = 2$ si $2 < t < 3$
et $g(t) = 4$ si $3 < t < 4$

Déduire de la question précédente leurs transformées de Laplace.

Exercice 10

On considère les trois fonctions f, g et h définies respectivement par :

$f(t) = \cos(t - \frac{\pi}{6}).\, u(t - \frac{\pi}{6})$

$g(t) = \cos t \,.\, u(t - \frac{\pi}{6})$

$h(t) = \cos(t - \frac{\pi}{6}) \,.\, u(t)$

Les tracer puis déterminer leurs transformées de Laplace