

Cours 8

Séries de Fourier (2)

- **Une première série de Fourier** [d'après Marco Caponigro]

On considère la fonction périodique f de période 2π , paire, qui satisfait à la relation $f(x) = x$ si $x \in [0, \pi]$.

a) Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(f)$ de la fonction f et montrer que $S(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{(2\ell + 1)^2} \cos((2\ell + 1)x)$.

b) Dédurre de ce qui précède les sommes des séries numériques $\Sigma_1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell + 1)^4}$ et $\Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

- **Une seconde série de Fourier** [d'après Marco Caponigro]

On considère la fonction g périodique de période 2π , impaire et qui satisfait à la relation : $g(x) = x(\pi - x)$ lorsque $x \in [0, \pi]$.

a) Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(g)$ de la fonction g .

b) Calculer la valeur exacte des sommes $S_1 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\ell + 1)^6}$ et $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$