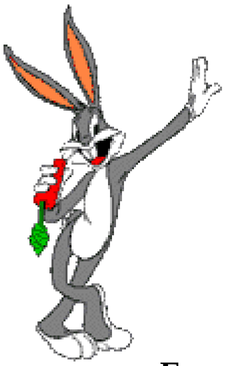

MVA101 – CNAM- Nathalie Zanon
ED 7: séries de Fourier

Exercice 1

Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[0 ; 2\pi[$ par : $f(x) = \exp x$

1. Faire la représentation graphique de f
2. Calculer a série de Fourier de f sous forme complexe.
3. Etudier la convergence de cette série.
4. Calculer l'énergie du signal et écrire la relation de Parseval.
5. Calculer la somme $\sum_0^\infty \frac{1}{1+n^2}$
6. Donner la série de Fourier sous sa forme réelle.
7. En déduire la somme $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

Exercice 2

On considère la fonction f paire et 2π-périodique, définie sur $[0 ; \pi[$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2$$

1. Tracer rapidement la courbe représentative de f.
2. Déterminer la série de Fourier de f sous sa forme réelle.
3. Préciser la convergence de cette série.
4. Calculer E l'énergie de f.
5. Calculer $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$
6. Soit $f_n = h_0 + h_1 + \cdots + h_n$, où h_n est l'harmonique de rang n. On note E_n l'énergie de f_n.
   Déterminer le plus petit entier n tel que $\frac{E_n}{E} \geq 0{,}996$. On notera n_0 cet entier.
7. Quel est le maximum de $\left|f(x) - f_{n_0}(x)\right|$? Calculer l'erreur relative définie par :

$$\frac{\max\left|f(x) - f_{n_0}(x)\right|}{\max\left|f(x)\right|}$$

Exercice 1 : On considère la fonctions 2π-périodique définie par :

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi].$$

et la fonction 2π-périodique définie par :

$$g(x) = |x| \quad x \in [-\pi, \pi].$$

1. Déterminer les séries de Fourier trigonométriques $S(f)$ de f et $S(g)$ de g ;
2. Étudier la convergence de ces séries (simple et uniforme) ;
3. Calculer les valeurs des séries numériques :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 4

Soit f la fonction périodique de période 2 définie sur [0 ;2[par $f(x) = x^2$

1. Calculer sa série de Fourier.
2. Etudier la convergence de cette série. En déduire $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ et $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$
3. Calculer l'énergie du signal et écrire la relation de Parseval. Jusqu'à quelle harmonique faut-il aller pour que la somme partielle de la série de Fourier donne 95 % de l'énergie du signal.
4. Calculer $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4}$

Exercice 5

Soit f une fonction périodique, de période T, définie par $f(x) = x.(T-x)$ sur [0 ;T[

1. Que peut-on dire de $f(x-T)$?
2. Que vaut $f(-T/2)$? Déterminer les expressions de $f(x)$ sur [-T ;0[et sur [T ;2T[
3. Etudier la continuité de f
4. Calculer ses coefficients de Fourier.
5. Etudier la convergence de la série de Fourier.
6. Calculer la dérivée f'
7. Déterminer la série de Fourier de f' et étudier sa convergence.

Exercice 6

Soit f la fonction périodique de période 3 définie sur [0 ;3[par $f(x) = x$

1. Calculer sa série de Fourier.
2. Etudier la convergence de cette série.
3. Calculer l'énergie du signal et écrire la relation de Parseval. Jusqu'à quelle harmonique faut-il aller pour que la somme partielle de la série de Fourier donne 95 % de l'énergie du signal.
4. Calculer $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi n}{3}$ et $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{4\pi n}{3}$

Exercice 7

1. Soit f une fonction de période T et $(c_n)_{n \in N}$ la suite de ses coefficients de Fourier complexes. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = f(x) - f\left(x - \frac{T}{2}\right)$$

a. Etudier la périodicité de g

b. Déterminer les coefficients de Fourier complexes de g notés d_n en fonction des coefficients c_n de f.

2. On considère la fonction f de période 2 définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0;1[\\ 0 & x \in [1;2[\end{cases}$$

Calculer la série de Fourier de f sous sa forme complexe.

3. En déduire le développement en série de Fourier complexe de la fonction g de période 2 définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in [0;1[\\ 1 - x & x \in [1;2[\end{cases}$$