MVA101- CNAM-. Nathalie Zanon
ED 6 : séries entières

<u>Exercice 1 : Rayon de convergence d'une série entière</u>

Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

1. $\sum_0^\infty n! z^n$
2. $\sum_0^\infty \left(\frac{z}{\rho}\right)^n$, où ρ >0 est un paramètre fixé.
3. $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$
4. $\sum_0^\infty \frac{n^n}{n!} z^n$
5. $\sum_0^\infty \frac{shn}{ch^2 n} z^n$
6. $\sum_1^\infty (\cos\frac{1}{n})^{n^\alpha} z^n$, où α est un paramètre réel.
7. $\sum_0^\infty (b_n z)^n$, où $(b_n)_{n\in N}$ est une suite réelle positive décroissant vers 0

<u>Exercice 2 : développement d'une fonction en série entière</u>

Donner le développement en série entière des fonctions suivantes, ainsi que le rayon de convergence de la série obtenue.

1. f(z) = $\frac{1-z}{1+2z}$ (en 0 puis en 1)
2. f(z) = z^5 (en tout z_0)
3. f(z) = $\frac{1}{z-a}$, où a est un paramètre complexe (en tout $z_0 \neq$ a)
4. f(z) = $\frac{1}{(z-a)^2}$ où a est un paramètre complexe (en tout $z_0 \neq$ a)

   Généraliser à f(z) = $\frac{1}{(z-a)^p}$, où p est un entier naturel

5. f(z) = $\dfrac{z}{z^2-2z-3}$ (en 0)
6. f(z) = $\dfrac{1}{3-2z}$ (en 3)
7. f(z) = $\dfrac{(1+z)^2}{(1-z)^2}$ (en 0)
8. f(z) = e^z (en 0 puis en 1)
   g(z) = cosz (en 0)
   h(z) = sinz (en 0)
   j(z) = chz (en 0)
   k(z) = shz (en 0)
9. f(z) = $\dfrac{1}{1+z+z^2}$ (en 0)
10. f(z) = $\dfrac{z\sin\alpha}{z^2-2z\cos\alpha+1}$ avec α >0 (en 0)
    g(z) = $\dfrac{zsh\alpha}{z^2-2zch\alpha+1}$ avec α >0 (en 0)
11. f(z) = $(1+z)^m$ avec m réel (en 0)
    g(z) = $(1+z)^{\frac{1}{2}}$ (en 0)
12. f(z) = $\sin^2 z \cos z$ (en 0)
13. f(z) = $\dfrac{e^z}{1+z}$ (en 0)
14. f(z) = ln (1-z) (en 0)
    g(z) = ln (1+z) (en 0)
15. f(z) = arctanzx (en 0)

<u>Exercice 3 : sommation de séries entières</u>

Déterminer la somme des séries entières de type $\sum_0^{\infty} P(n)z^n$, où P est un polynôme.

Application à $\sum_0^{\infty} (n^3+2n+1)z^n$

<u>Exercice 4 : séries entières réelles</u>

On considère la fonction réelle d'une variable réelle f définie par f(x) = $\dfrac{1}{1+x^2}$

1. Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor de f en un point réel x_0 ?
2. En déduire le rayon de convergence de la fonction réelle d'une variable réelle *Arctan*

Exercice 5 : équations différentielles

On cherche les solutions de l'équation différentielle : x y'' + 2 y' − x y = 4 − x développables en série entière au voisinage de 0.

Soit y = $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une telle solution.

1. Par quelle relation de récurrence sont liés les coefficients a_n d'une série solution ? Que vaut a_1 ?

2. Quel est le rayon de convergence d'une série solution ?

3. Déterminer les séries entières solutions en fonction de a_0 et calculer leur somme.

4. Préciser la solution telle que y(0) = 1 .

Exercice 6 : fonctions circulaires et hyperboliques

Calculer |cosz|² en fonction de ch(2y) et cos (2x), où z = x+iy

Exercice 7 : Résolution d'équations à variable complexe:

a) Résoudre dans C l'équation : cosz = 10

b) Résoudre dans C l'équation : sinz = 0

c) Résoudre dans C l'équation : chz + i shz = 2.
En déduire les solutions complexes de l'équation : cosz + sinz = 2

Exercice 8 : Convergence d'une série entière

Pour chacune des séries entières suivantes :

- Déterminer le rayon de convergence R
- Étudier la convergence pour z = R et pour z = - R

1. $\sum z^n \sin \frac{1}{n}$

2. $\sum z^n \ln n$

3. $\sum z^n \frac{n!}{n^n}$

4. $\sum z^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 9 : équations différentielles

L'objet de l'exercice est de rechercher les solutions de l'équation différentielle

$$(1+2x)\, y'' - 4\,(1+x)\, y' + 4\, y = 0 \qquad \text{(E)}$$

qui sont développables en série entière au voisinage de 0.

Soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une telle solution.

1. Par quelle relation de récurrence sont liés les coefficients a_n ?

2. Quand $a_0 = a_1 = 1$, que vaut a_n pour n > 1 ?
   Déduire y dans ce cas.

3. Quand $a_0 = 1$ et $a_1 = 2$, montrer par récurrence que $a_n = \frac{2^n}{n!}$.
   Déduire y dans ce cas.

4. On admettra que toute solution de (E) est une combinaison linéaire des fonctions trouvées aux questions 2 et 3. Donner une expression de y quand $a_0 = \alpha$ et $a_1 = \beta$.

5. Quel est le rayon de convergence d'une série solution ?

Exercice 10: équations différentielles

On considère l'équation différentielle (E)

$$x^2\, y'' + 4\, x\, y' + (2 + x^2)\, y = 2$$

On cherche ses solutions qui sont développables en série entière au voisinage de 0.

Soit y = $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une telle solution.

6. Par quelle relation de récurrence sont liés les coefficients a_n d'une série solution ?

7. Que vaut a_1 ? Plus généralement, que valent les a_n pour n pair ?

8. Quel est le rayon de convergence d'une série solution ?

9. Expliciter les coefficients a_n pour n pair

10. Écrire la série x^2y et en déduire une expression de la solution y trouvée.

11. Déterminer la solution générale de l'équation (E) en utilisant le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = \frac{u(x)}{x^2}$$

En déduire que la solution trouvée ci-dessus est la seule solution de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.