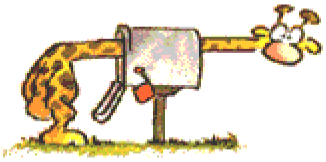

MVA101 – CNAM- Nathalie Zanon
ED 5 : séries de fonctions

Exercice 1

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions $\sum f_n(x)$ dans les cas suivants:

1. f_n (x) définie sur R^+ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$
2. f_n définie sur R^+ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx+\sqrt{n}}$
3. f_n définie sur R^+ par $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+n^2}$
4. f_n définie sur [0 ; 1] par $f_n(x) = x^n(1-x)$
5. f_n définie sur [0 ; 1] par $f_n(x) = (-x)^n(1-x)$

Exercice 2

On considère la série de fonctions $\sum f_n(x)$ où, pour tout n > 0, f_n est définie sur R^+ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2x+n^3}$$

1. Etudier la convergence uniforme de cette série
2. Montrer que la somme est infiniment dérivable sur R^+

Exercice 3

Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ où, pour tout n > 0, f_n est définie sur R^+ par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2x+n}$$

Exercice 4

On considère la série de fonctions $\sum f_n(x)$ où f_n est définie sur R^+ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de cette série sur R^+
2. Etudier la convergence normale de cette série sur R^+
3. Etudier la convergence uniforme de cette série sur R^+

4. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[\alpha\,;+\infty[$, pour tout $\alpha > 0$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, où $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Etudier sa continuité
3. Etudier sa dérivabilité
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et trouver un équivalent. On admettra $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$