MVA101 – CNAM- Nathalie Zanon
ED 4 : suites de fonctions

Exercice 1:

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites :

1. f_n définie sur [0 ;1] par $f_n(x) = x^n$
2. f_n définie sur [0 ;1] par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$
3. f_n définie sur R par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = \dfrac{1-e^{-n^2x^2}}{x}$ si $x \neq 0$
4. f_n définie sur R par le graphe ci-contre

Exercice 2:

On considère la suite (f_n) définie sur R par $f_n(x) = \dfrac{1}{n}e^{-nx}$

1. Etudier sa convergence simple et déterminer la fonction limite notée f
2. Y a-t-il convergence uniforme ? Sur quel ensemble ?

Exercice 3:

On considère la suite (f_n) définie sur [0 ;1] par $f_n(x) = \dfrac{nx(x^2+1)e^{-x}}{nx+1}$

1. Etudier sa convergence simple et déterminer la fonction limite notée f
2. En étudiant rapidement cette fonction, montrer qu'elle est majorée par 1
3. Soit a > 0. Montrer que f_n converge uniformément vers f sur [a ;1]. On pourra utiliser la majoration trouvée à la question 2.
4. Y a-t-il convergence uniforme sur [0 ;1] ?

Exercice 4

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) définie sur R par :

$$\begin{cases} f_n(x) = n^2x & si \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ f_n(x) = -n^2x & si \quad -\dfrac{1}{n} \le x \le 0 \\ f_n(x) = 0 & si \quad |x| > \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Exercice 5

On considère la suite (f_n) définie sur R par f_n (x) = $nxe^{(1-n)x}$ si x > 0 et f_n (x) = 0 sinon.

Après avoir sommairement tracé le graphe de f_n, étudier la convergence simple de cette suite de fonctions ainsi que sa convergence uniforme.

Exercice 6

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) définie sur R par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n}{n+1} e^{nx+1} & \forall x \leq -\dfrac{1}{n} \\ f_n(x) = \dfrac{n}{n+1} e^{-(x+\frac{1}{n})} & \forall x > -\dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Exercice 7

On considère la suite (f_n) définie sur R par f_n (x) = $(\sqrt{2}+nx)e^{-n^2x^2}$

Après avoir sommairement tracé le graphe de f_n, étudier la convergence simple de cette suite de fonctions ainsi que sa convergence uniforme.

Exercice 8:

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites :

1. f_n définie sur]- π ; π [par f_n (0) = 0 et f_n (x) = $\dfrac{\sin^2 nx}{n \sin x}$ si x ≠ 0
2. f_n définie sur [0 ; π/2] par f_n (x) = n sinx $\cos^n x$