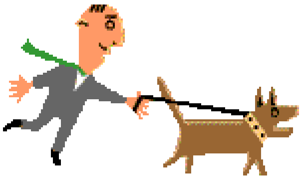

MVA101 – CNAM- Nathalie Zanon
ED 3 : séries numériques quelconques

Exercice 1

Étudier la nature des séries numériques suivantes :

1. $u_n = \cos\frac{1}{n}$
2. $u_n = \sin\frac{1}{2^n}$
3. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
4. $u_n = \sin[(n+\frac{1}{n})\pi]$
5. $u_n = \sqrt{n!}\sin x . \sin\frac{x}{\sqrt{2}}.......\sin\frac{x}{\sqrt{n+1}}$, où x > 1
6. $u_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1+\frac{2}{n+a}\right)^{n}$, où a > 0

Exercice 2: série alternée

On considère la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x dx$

1. Montrer qu'elle est alternée
2. Exprimer u_n en fonction de u_0
3. En déduire la somme $\sum_0^\infty u_n$

Exercice 3 : sommes de séries

Après avoir démontré la convergence, calculer la somme $\sum_1^\infty u_n$ des séries de terme général u_n :

1. $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$
2. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
3. $u_n = \frac{n^2}{n!}$
4. $u_n = \frac{n-1}{(n+1)!}$

Exercice 4 : groupement de termes

On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{n+(-1)^n}}$

1. Calculer u_{2p-1} et u_{2p}
2. Etudier la nature de la série $\sum v_n$, où $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$
3. en déduire la nature de la série $\sum u_n$

Exercice 5 : série alternée

On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n.\sqrt[n]{n}}$

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} |u_n|$
2. On pose f(x) = lnx.exp($\frac{\ln x}{x}$). Étudier le sens de variation de f pour x assez grand.
3. En déduire la décroissance de $|u_n|$
4. Conclure sur la convergence de la série $\sum u_n$

Exercice 6

On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^2}{2^n}, \text{ pour } n \geq 1$$

1. Etudier sa convergence
2. Pour |x| <1, que valent les sommes $\sum_{n\geq 0} x^n$, $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$?
3. En déduire la somme $\sum_{1}^{\infty} u_n$