Cours 2 — Séries à termes positifs

- **Converge ou diverge ?** [d'après Nathalie Zanon]

  Etudier la nature (convergence vers un nombre réel ou somme partielle $S_n \equiv \sum_{k=0}^{n} u_k$ qui tend vers $+\infty$) des séries de terme général u_n suivantes :

  a) $u_n = \dfrac{1}{n+6^n}$

  b) $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

  c) $u_n = \left(\dfrac{3n+1}{2n+5}\right)^n$

  d) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

- **Un exemple important**

  Pour n entier supérieur ou égal à 1, on pose $u_n = \dfrac{1}{n\,(n+1)}$.

  a) Montrer que la série de terme général u_n converge.

  b) Montrer qu'on peut exprimer simplement la somme partielle $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de l'entier n.

  c) Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

- **Formule de Stirling**

  On se propose de démontrer que le quotient $a_n \equiv \dfrac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{n}}$ tend vers une limite finie si l'entier n tend vers $+\infty$.

  a) Montrer que la propriété précédente équivaut à démontrer que la série de terme général $u_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n$ est convergente.

  b) En effectuant un développement limité de u_n en fontion de n, établir le résultat.

François Dubois, 05 octobre 2016.