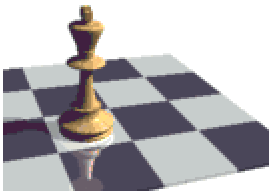

CNAM-IMATH-MVA101
Nathalie Zanon

ED 1: suites numériques

Exercice 1

La suite (u_n) est définie par u_0 = -5 et $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{2}$

1. Quel type de suite est-ce ? Quelle est sa raison ?
2. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5
3. Exprimer u_n en fonction de n
4. Calculer $u_0 + u_1 + ... + u_{18}$
5. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 2

La suite (u_n) est définie par u_0 = 9 et $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n$ pour tout n entier naturel

1. Quel type de suite est-ce ?
2. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5
3. Exprimer u_n en fonction de n
4. Calculer $u_0 + u_1 + ... + u_{10}$
5. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 3

Trouver toutes les suites géométriques (u_n) telles que $u_1 = 4$ et $u_3 = 9$.

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes :

1. A = 0,25 + 0,5 + 0,75 + 1 + …+ 12,5
2. B = $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{38}}$

Exercice 5 : suites récurrentes définies par une fonction croissante

A. On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par récurrence par u_0 = - 1 et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1. On pose f(x) = $\sqrt{2x+3}$. Tracer rapidement le graphe de f et s'en servir pour avoir une première idée du comportement de la suite (u_n)
2. Etudier la monotonie de (u_n)
3. En déduire la convergence de (u_n)
4. Quelle est sa limite ?

B. Mêmes questions pour la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

C. Généraliser à toute suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 > -3/2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

Exercice 6 : suite homographique

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1} \end{cases}$$

1°) Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

2°) Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n > 0$ et $u_n \leq 1$.

3°) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire sa nature (convergente ou divergente).

4°) On définit une nouvelle suite (v_n) en posant : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$

Exprimer la récurrence liant v_{n+1} à v_n. De quel type est la suite (v_n) ?

En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n puis du terme général de la suite (u_n).

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

5°) Montrer que pour $n > 0$: $u_n \geq \dfrac{1}{4n}$. En déduire la nature de la série de terme général (u_n).

Exercice 7 : Convergence

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$ **2.** $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$ **4.** $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

5. $u_n = 3^n e^{-3n}$.

6. $u_n = \cos(n!\pi\frac{3}{5})$.

Exercice 8 : suites adjacentes

Soient les suites (u_n) et (v_n) de termes généraux :

$$\begin{cases} u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ v_n = u_n + \frac{1}{n!} \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
En déduire qu'elles sont convergentes et admettent la même limite.

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{3}{u_n})$ et $u_0 = 1$.

i. Calculer u_n pour $n = 1,2,3$.

ii. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

On pourra étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$

iii. En déduire que (u_n) est une suite convergente de limite $\sqrt{3}$.

iv. Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{3})$. En déduire une approximation de $\sqrt{3}$ à 0.0001 près.

Exercice 10

Soit a un réel strictement positif. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt[n]{a}$

1. On suppose a>1
   a) Montrer que (u_n) est minorée et décroissante.
   b) On fixe ε >0. Montrer que si $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$, alors $a < (1+\varepsilon)^n$
   c) En déduire la limite de la suite (u_n)

2. On suppose a<1. En considérant b = 1/a, calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 11: suites arithmétiques

Soit (u_n) une suite arithmétique définie pour tout n entier naturel. Pour chacune des questions suivantes, dire si la réponse est toujours OUI, toujours NON ou si elle dépend de la suite (u_n).

1. La suite de terme général u_n +3 est-elle arithmétique ?
2. La suite de terme général $2u_n$ + n est-elle arithmétique ?
3. La suite de terme général $|u_n|$ est-elle arithmétique ?

Exercice 12: systèmes linéaires

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par u_0, v_0 et le système $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$

1. Ecrire ce système sous forme matricielle à l'aide d'une matrice M qu'on écrira sous la forme : M = $\frac{1}{3}$ (I + A), I étant la matrice Identité
2. Déterminer A^n et en déduire M^n grâce à la formule du binôme de Newton
3. En déduire u_n et v_n en fonction de n et de u_0 et v_0
4. Etudier la convergence des suites (u_n) et (v_n)
5. Retrouver ces résultats sans matrice, en étudiant $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$.

Exercice 13

On considère une suite (u_n) définie par récurrence par u_0 et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n{}^2)$

a) On pose f(x) = $\frac{1}{3}(4 - x^2)$. Tracer le graphe de f
b) Quelles sont les limites possibles pour la suite (u_n) ?
c) Etudier la monotonie de (u_n) avec l'aide du graphe de f. on sera amené à distinguer selon la valeur de u_0
d) Conclure sur la convergence de (u_n)

Exercice 14: suites à récurrence linéaire

A. On considère une suite (u_n) définie par récurrence par u_0, u_1 et $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 2u_n}{3}$

a. Chercher u_n sous la forme r^n et trouver une équation caractéristique pour r
b. En déduire u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
c. Conclure sur la convergence de la suite.

B. Mêmes questions pour la suite (u_n) définie par u_0, u_1, u_2 et la relation de récurrence :

$$u_{n+3} = \frac{8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n}{4}$$

Exercice 1 : On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{n + u_n}{n^2} \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $u_n \leq 2$, $\forall n \geq 1$.
2. Montrer que
$$\frac{1}{n-1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{(n-1)^2} \quad \forall n \geq 2.$$
3. Montrer que la suite à une limite ℓ.

Exercice 2 : Soit $a > 0$. On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \\ u_0 > 0, \end{cases}$$

1. Montrer que
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$
2. Montrer que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour $n \geq 1$.
3. Montrer que la suite est décroissante.
4. En déduire que la suite converge vers $\sqrt{a}$.
5. Donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$. (Hint : utiliser la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$).
6. Montrer que, si $u_1 - \sqrt{a} \leq K$, pour $n \geq 1$ on a
$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{K}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$