MVA101 – CNAM-IMATH
Nathalie Zanon

ED 12 : Réduction des endomorphismes

Exercice 1

Réduire, lorsque c'est possible, les matrices suivantes. On donnera la matrice de passage de la base canonique à une éventuelle base de vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 \\ -9 & -8 & -9 \\ -9 & -9 & -8 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres de A. Peut-on dire, a priori, si A est diagonalisable ?
2. Déterminer des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres trouvées.
3. Démontrer que A est diagonalisable.
4. Trouver P (et son inverse) telle que $D = P^{-1}AP$

Utiliser la diagonalisation pour calculer $A^n, \forall n \in N^*$

Exercice 3

Soit *f* l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x\text{-}y\text{-}z, \text{-}x+y\text{-}z, \text{-}x\text{-}y+z)$

1. Déterminer *Ker(f)* et *Im(f)*. *f* est-elle bijective ?
2. Quelle est la matrice A de f dans la base canonique ?
3. Montrer que A est inversible et calculer son inverse
4. Diagonaliser A et calculer $A^n, \forall n \in N^*$

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres de A. Peut-on dire, a priori, si A est diagonalisable ?
2. Déterminer des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres trouvées.
3. Démontrer que A est diagonalisable.
4. Trouver P (et son inverse) telle que $D = P^{-1}AP$

Utiliser la diagonalisation pour calculer $A^n, \forall n \in N^*$

Exercice 5

On considère la matrice A = $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

1. Diagonaliser A
2. Calculer $A^n, \forall n \in N^*$
3. On considère les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par leurs premiers termes u_0, v_0, w_0 et par les relations de récurrence suivantes, pour n ≥ 0 :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n.

En déduire u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Exercice 6

Soit *m* un paramètre réel, on considère la matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$

1. Quelles sont les valeurs propres de A ?
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On suppose m = 2. Calculer $A^n, \forall n \in N^*$

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.

En déduire qu'il existe une matrice B (qu'on ne demande pas de calculer) telle que $B^3 = A$.

Exercice 8

Réduire les matrices suivantes : M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ N = $\begin{pmatrix} -21 & 4 & 12 \\ 10 & -3 & -6 \\ -40 & 8 & 23 \end{pmatrix}$