MVA101 – CNAM Paris- Nathalie Zanon

ED 11 : Matrices et déterminants

Exercice 1 : déterminant 4x4

Calculer de deux manières différentes le déterminant d'ordre 4 suivant:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 8 & 10 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 2 : matrices inverses

Calculer, lorsque c'est possible, les matrices inverses des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. I étant la matrice unité, calculer les trois réels a, b et c tels que : $aA^3 + bA^2 + cA = I$
2. En déduire l'inverse de A.
3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $AX = B$

Exercice 4: puissances de matrices

On considère les matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N = A – I, où I est la matrice identité.

1. Calculer N² et N³. En déduire N^n pour tout n entier naturel.
2. Donner une formule exprimant A^n en fonction de I, N et N² pour tout n entier naturel.
3. Déterminer des nombres a, b et c tels que la matrice B = aI + bN + cN² vérifie AB = I
4. En déduire la matrice inverse de A en fonction de I, N et N²
5. Calculer A^{-n} pour tout n entier naturel.
6. En déduire A^k, pour k entier relatif quelconque.

Exercice 5

On considère la matrice A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer A² et A³.
b. Déterminer des nombres a, b et c tels que A³ + a A² + b A + c I = 0
c. En déduire que A est inversible et donner sa matrice inverse.

Exercice 6

On considère la matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calculer A², A³ et A^4
b. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} m+1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}$, où m est un paramètre réel.
   Résoudre et discuter le système $AX = B$

c. Ecrire la matrice $M = A + I$, I étant la matrice unité, et calculer son inverse M^{-1}

Exercice 7

On considère la matrice A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A² et A³.

2. I étant la matrice unité, calculer les trois réels a, b et c tels que :
$$A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$$

3. En déduire l'inverse de A

Exercice 8 : diagonalisation

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1◦) Calculer le déterminant de A. Que peut-on en déduire?
2◦) Ecrire la matrice $A - \lambda I$, où λ est un réel et I la matrice identité.
3◦) Calculer le déterminant de $A - \lambda I$ et trouver les valeurs de λ qui l'annulent.
4◦) Pour chaque valeur de λ ainsi déterminée, écrire la matrice $A - \lambda I$
5◦) Déterminer, pour chaque valeur de λ, un vecteur V tel que $(A - \lambda I)\, V = 0$
6◦) On notera P la matrice formée par chacun des vecteurs V ainsi obtenus.
Calculer P^{-1}, inverse de P, ainsi que $P^{-1} A\, P$ que l'on notera D
7◦) Calculer D^n puis A^n, $\forall n \in IN$. On pourra raisonner par récurrence pour trouver D^n et en déduire A^n en utilisant la définition de D.

Exercice 9 : système linéaire

Résoudre le système linéaire suivant par la méthode du pivot de Gauss et par la méthode de Cramer.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Exercice 10 : système linéaire

Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y - z = a_1 \\ -2x - 3y + 3z = a_2 \\ x + y - 2z = a_3 \end{cases}$ dans les cas suivants

a. $a_1 = 0;\ a_2 = 0;\ a_3 = 0$
b. $a_1 = 1;\ a_2 = -2;\ a_3 = 1$
c. $a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_3 = 1$

Exercice 11 : systèmes linéaires

Résoudre chacun des systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauss:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x + 4y + 3z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - mz = 0 \\ x + my - 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 12 : rang d'une matrice

Calculer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **4.** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 13 : rang d'une matrice

Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$