Conservatoire national des arts et métiers
Licence analyse-qualité PHR101 - Mathématiques

2011--2012 T. Horsin

ED 1. Rappel sur les nombres complexes.

1 Conjugaison

Donner les conjugués des nombres complexes suivants (dans cet exercice a et b désignent toujours des nombres réels), lorsqu'il s'agit d'une fraction, rendre réel le dénominateur:
$z = 3 + 2i$, $z = 2 + 3i$, $z = i(1 + ia)$, $z = \dfrac{a + bi}{b - ia}$, $z = \dfrac{1}{a + i(a + ib)}$, $z = \dfrac{1 + i}{1 + \dfrac{1 + i}{1 - i}}$.

2 Modules, arguments

i. Déterminer le module et l'argument de $z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1 - i$.

ii. En déduire le module et l'argument de $\dfrac{z}{z'}$, et déterminer $\cos(\dfrac{\pi}{12})$.

3 Forme exponentielle

Pour un nombre réel θ, on rappelle que $e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
On admet la relation $\exp(i\theta_1)\exp(i\theta_2) = \exp(i(\theta_1 + \theta_2))$.
-Calculer $(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$
-Montrer que

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

et

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1).$$

En déduire que, lorsque c'est possible, on a

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2)}{1 - \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}.$$

4 Partager un gâteau en 5.

On admet que les solutions de l'équation $x^5 - 1 = 0$ sont 1, $e^{2i\pi/5}$, $e^{4i\pi/5}$, $e^{-2i\pi/5}$, $e^{-4i\pi/5}$.

i. Calculer $(x - 1)(x^2 + (\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2})x + 1)(x^2 + (\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2})x + 1)$.

ii. Parmi les trois équations $x - 1 = 0$, $x^2 + (\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2})x + 1 = 0$, et $x^2 + (\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2})x + 1 = 0$, quelle est celle vérifiée par $e^{2i\pi/5}$?

iii. En déduire les valeurs de $\cos(2\pi / 5)$ et $\sin(2\pi / 5)$.

5 Lieux

Déterminer les lieux des points M d'affixe z vérifiant

i. $|z - 1| = |z - i|$

ii. $\dfrac{z - 1}{z - i}$ est réel.

iii. $\dfrac{z - 1}{z - i}$ est imaginaire pur.