Devoir n°3
Eléments de corrigé

Exercice 1

1°) $\mathcal{D}_x =]-\infty, 1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

$\mathcal{D}_y =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

Dès lors, il y a un point $t = 0$ pour lequel x et y ne sont pas définies et il faudra examiner $x(t)$ pour $t = 1$ et $y(t)$ pour $t = -1$, en même temps que $x(t)$ quant $t \to -1$ et $y(t)$ quand $t \to 1$.

2°) On examine $x(-t) = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{1}{t} = -\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t} = -\left(\dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{t}\right) = -y(t)$

et $y(-t) = \dfrac{1}{-t-1} - \dfrac{1}{t} = -\left(\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t}\right) = -x(t)$.

Donc quand on change t en $-t$, x devient $-y$ et y se change en $-x$. Donc, on réduit le domaine en $\mathbb{R}_*^+$ (privé de 1 pour $y(t)$) et on fait une symétrie par rapport à la 2ebissectrice $y = -x$.

Donc : $\mathcal{E} = \mathbb{R}_*^+$ pour $x(t)$ et $\mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$ pour $y(t)$

3°) et 4°) Quand $t \to +\infty$, $x(t)$ et $y(t) \to 0$

Quand $t \to 1$, $x(t) \to \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$ et $y(t) \to \pm\infty$ suivant que $t \to 1^{\pm}$,

donc $x = \dfrac{3}{2}$ est asymptote verticale.

Quand $t \to 0^+$, $x(t)$ et $y(t) \to +\infty$. Donc, il va falloir étudier $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ quand $t \to 0^+$:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{t}}{\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t}} = \frac{\dfrac{2t-1}{t(t-1)}}{\dfrac{2t+1}{t(t+1)}} = \frac{2t-1}{\cancel{t}(t-1)} \cdot \frac{\cancel{t}(t+1)}{2t+1} = \frac{2t-1}{2t+1)} \cdot \frac{t+1}{t-1} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} (-1)(-1) = +1$$

On étudie $y(t) - x(t)$ quand $t \to 0^+$:

$$y(t) - x(t) = \frac{1}{t-1} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{t}} - \frac{1}{t+1} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{t}} = \frac{\cancel{t}+1-\cancel{t}+1}{(t-1)(t+1)} = \frac{2}{t^2-1} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow}= -2$$

$\Rightarrow y = x - 2$ est asymptote oblique quand $t \to 0^+$.

Enfin, examinons la position de la courbe par rapport à son asymptote oblique quand $t \to 0^+$:

$$y(t) - x(t) + 2 = \frac{2}{t^2-1} + 2 = 2\left(\frac{1}{t^2-1} + 1\right) = 2\left(\frac{\cancel{1} + t^2 - \cancel{1}}{t^2-1}\right) = \frac{2t^2}{t^2-1} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow}= 0^-$$

donc courbe en -dessus de son asymptote oblique.

Il faut également regarder le problème $t \to +\infty$ pour savoir le comportement en $\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$

i.e. la tangente en ce point : pour ce faire, calculer $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Nous ne ferons l'étude que sur $\mathbb{R}_*^+$ puisque nous compléterons par symétrie par rapport à $y = -x$ sur $\mathbb{R}_*^-$.

5°) $x'(t) = -\dfrac{1}{(t+1)^2} - \dfrac{1}{t^2} < 0$; $x''(t) = \dfrac{2}{(t+1)^3} + \dfrac{2}{t^3} > 0$

$y'(t) = -\dfrac{1}{(t-1)^2} - \dfrac{1}{t^2} < 0$; $y''(t) = \dfrac{2}{(t-1)^3} + \dfrac{2}{t^3} > 0$

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-\left(\dfrac{1}{(t-1)^2} + \dfrac{1}{t}\right)}{-\left(\dfrac{1}{(t+1)^2} + \dfrac{1}{t^2}\right)} = \frac{\dfrac{t^2+(t-1)^2}{t^2(t-1)^2}}{\dfrac{t+(t-1)^2}{t^2(t+1)}} = \frac{2t^2-2t+1}{\cancel{t^2}(t-1)^2} \cdot \frac{\cancel{t^2}(t+1)^2}{2t^2+2t+1}$$

$$= \frac{2t^2-2t+1}{2t^2+2t+1} \cdot \frac{(t+1)^2}{(t-1)^2}$$

Donc : $t \to +\infty,\ m(t) \to \dfrac{2}{2} \cdot \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ la tangente en $\left|\begin{array}{l}0\\0\end{array}\right.$: $y - 0 = 1(x-0)$ *i.e.* $y = x$.

$t \to 1\ ,\ m(t) \to +\infty$

$t \to 0\ ,\ m(t) \to 1$: on retrouve la pente de l'asymptote oblique $y = x - 2$ vue ci-dessus.

6°) Pour les points « double », on fait : $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$ avec $t_1 \neq t_2$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t_1+1} + \dfrac{1}{t_1} = \dfrac{1}{t_2+1} + \dfrac{1}{t_2} \\ \dfrac{1}{t_1-1} + \dfrac{1}{t_1} = \dfrac{1}{t_2-1} + \dfrac{1}{t_2} \end{cases} \quad \text{avec } t_1 \neq t_2$$

$$\frac{1}{t_1+1} - \frac{1}{t_2+1} = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \qquad \frac{t_2 + \cancel{1} - t_1 - \cancel{1}}{(t_1+1)(t_2+1)} = \frac{t_1-t_2}{t_1t_2}$$

$$\frac{-(t_1-t_2)}{(t_1+1)(t_2+1)} = \frac{t_1-t_2}{t_1t_2};\ t_1 \neq t_2 \Rightarrow \frac{-1}{(t_1+1)(t_2+1)} = \frac{1}{t_1t_2}$$

$(t_1+1)(t_2+1) = -t_1t_2$ *i.e.* $t_1t_2 + (t_1+t_2) + 1 = -t_1t_2$ *i.e.* $-2t_1t_2 = t_1 + t_2 + 1$

$$\frac{1}{t_1-1} - \frac{1}{t_2-1} = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1};\ \frac{t_2 - \cancel{1} - t_1 + \cancel{1}}{(t_1-1)(t_2-1)} = \frac{t_1-t_2}{t_1t_2};\ \frac{-(t_1-t_2)}{(t_1-1)(t_2-1)} = \frac{t_1-t_2}{t_1t_2};$$

$$t_1 \neq t_2 \Rightarrow \frac{-1}{(t_1-1)(t_2-1)} = \frac{1}{t_1t_2} \text{ i.e. } -t_1t_2 = (t_1-1)(t_2-1) = t_1t_2 - (t_1+t_2) + 1$$

i.e. $-2t_1t_2 = 1 - (t_1+t_2)$.

Donc on a : $t_1 + t_2 + 1 = 1 - (t_1+t_2)$ *i.e.* $2(t_1+t_2) = 0$ *i.e.* $t_2 = -t_1$ donc :

$-2t_1(-t_1) = 2t_1^2 = t_1 - t_1 + 1 = 1$

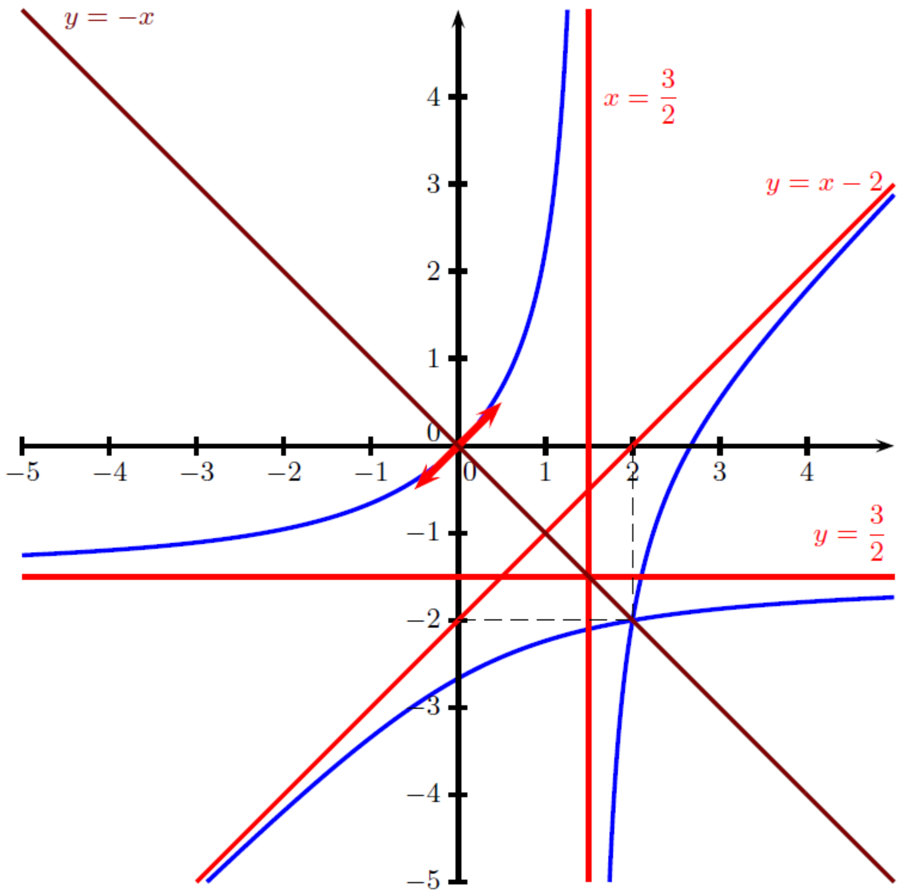
$2t_1^2 = 1$, $t_1^2 = \dfrac{1}{2}$, $t_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on se place sur $\mathbb{R}_*^+ \Rightarrow$ on prend $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui donne comme point double :

$$x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+1} + \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{1+\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}} = 2.$$

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1} + \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-2+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} = \frac{-2(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}$$
$$= -2$$

Donc, le point double sur $\mathbb{R}_*^+$ est $A\left|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right.$

$x'(t)$ et $y'(t)$ ne s'annulent pas et donc pas simultanément.



Exercice 2

1°) et 2°) Période $T = 2\pi$, en effet $r(\theta+2\pi) = \ln(1-\cos(\theta+2\pi)) = \ln(1-\cos\theta)$ donc OK.
$r(-\theta) = \ln(1-\cos(-\theta)) = \ln(1-\cos\theta) = r(\theta)$
donc r paire donc étude sur $]0,\pi]$ avec symétrie par rapport à $x'Ox$. $\mathcal{E} =]0,\pi[$

3°) $r'(\theta) = \dfrac{(1-\cos\theta)'}{1-\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ or $\forall\theta \in]0,\pi]$, $\sin\theta \geqslant 0$

4°) $\tan V = \dfrac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \dfrac{\ln(1-\cos\theta)}{\left(\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)} = \dfrac{(1-\cos\theta)\ln(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$

$\theta \to \pi^-$, $\tan V \to +\infty$ et $\text{cotan}\, V = 0$ pour $\theta = \pi$, tangente $\perp Ox$.

Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\tan V = 0 \Rightarrow$ tangente à l'origine supportée par $y'Oy$.

5°) Pour $\theta \to 0^+$, il y a une direction asymptotique selon $x'Ox$.

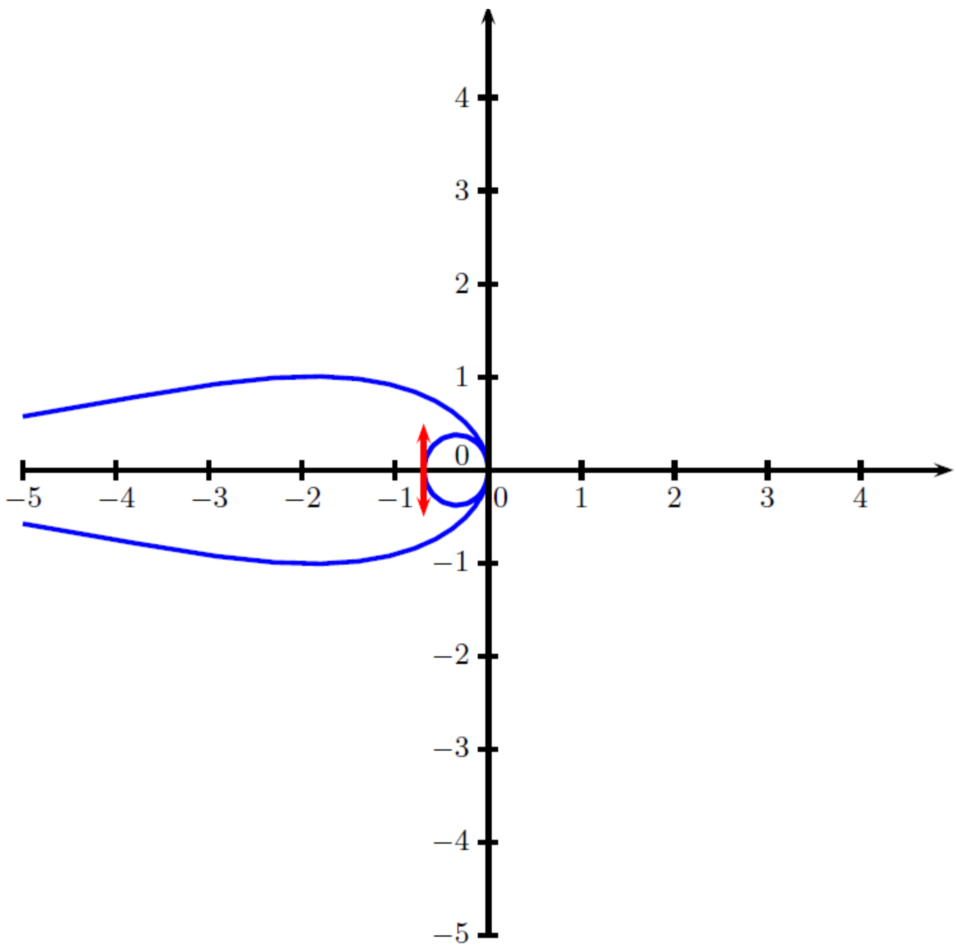
Alors $y = r(\theta)\sin\theta = (\sin\theta)(\ln(1-\cos\theta)) = (\theta+\theta\varepsilon(\theta))(\ln(\dfrac{\theta^2}{2}+\theta^2\varepsilon(\theta))) = \theta(1+\varepsilon(\theta))\ln(\dfrac{\theta^2}{2}(1+\varepsilon(\theta)))$

$= \theta(1+\varepsilon(\theta))(2\ln\theta - \ln 2 + \ln(1+\varepsilon(\theta))) = 2\theta\ln\theta(1+\varepsilon(\theta))\left(1 - \dfrac{\ln 2}{2\ln\theta} + \dfrac{\ln(1+\varepsilon(\theta))}{2\ln\theta}\right) = 2\theta\ln\theta(1+\varepsilon(\theta))^2$

donc $y \underset{\theta \to 0^+}{\longrightarrow} = 0^-$ et donc la courbe admet $x'Ox$ comme asymptote.

La courbe n'admet que l'origine comme point double : $r(\theta) = -r(\theta+\pi) \Leftrightarrow \ln(1-\cos\theta) = -\ln(1+\cos\theta)$

$1-\cos\theta = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ *i.e.* $1-\cos^2\theta = 1$ *i.e.* $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ seule solution.



******