MVA005 - Corrigé du devoir n°1

Exercice 1

On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = |x| - |x - 1|$$

1°) Donner pour chacun des intervalles $]-\infty, 0]$, $[0, 1]$, $[1, +\infty[$ une expression sans valeurs absolues.

Sur $]-\infty, 0]$, $f(x) = -1$

Sur $[0, 1]$, $f(x) = 2x - 1$

Sur $]1, +\infty[$, $f(x) = 1$

2°) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$î

A l'intérieur de chacun des intervalles précédents, la fonction f est polynômiale donc continue. Il reste à vérifier la continuité aux points de jointure, à savoir 0 et 1

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 = f(0)$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x - 1) = -1$

Donc f continue en 0, de même

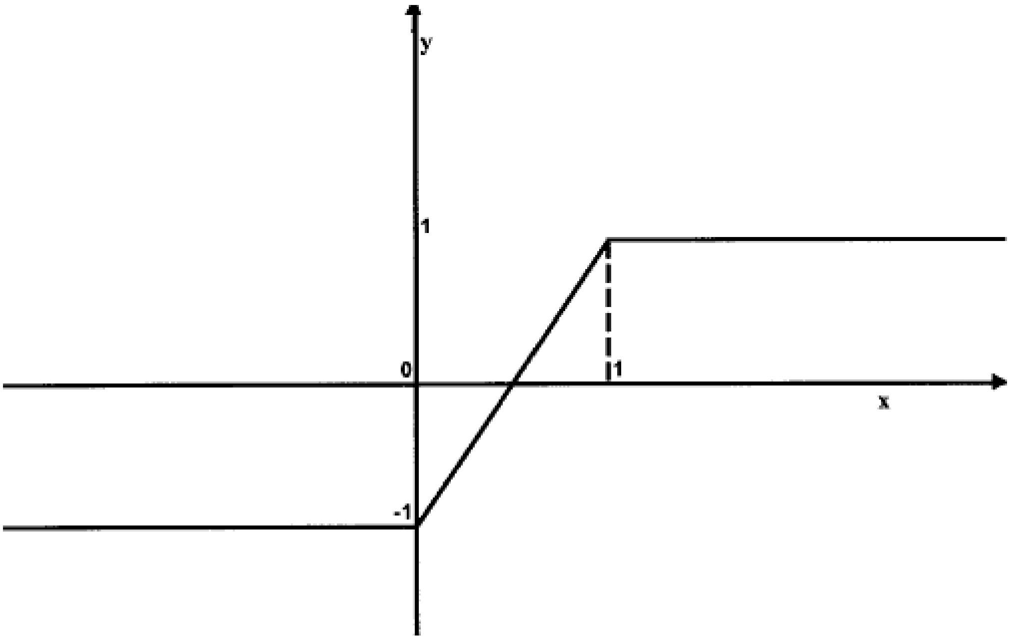
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(0) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

Donc f continue en 1

Remarque :

On aurait pu s'éviter tout travail en remarquant simplement que f est composée de fonctions polynômiales et de la fonction valeur absolue , cette dernière étant notoirement continue sur l'ensemble des réels.

3°). Courbe représentative de la fonction



3°) En utilisant les questions précédentes, discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, avec m entier .

- Si m < -1, il n'y a aucune solution
- Si m = -1, il y a une infinité de solutions , à savoir l'ensemble]-∞ ; 0]
- Si m = 0, il y a une unique solution x = ½
- Si m = 1, il y a une infinité de solutions , à savoir l'ensemble [1 ;+∞[

4°) Resoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x^2$

Si $x \geq 1$ l'équation à resoudre est $x^2 = 1$ cette équation possède deux solutions: $x = 1$ ou $x = -1$. comme x doit appartenir a l'intervalle $[1, +\infty[$ l'unique solution est $x = 1$

Si $x \in]0, 1[$, l'équation devient: $2x - 1 = x^2$ ce qui donne encore $x = 1$; c'est solution n'appartient pas à $]0, 1[$ (mais on l'a déjà prise en compte.)

Si $x \leq 0$ l'équation à resoudre est $x^2 = -1$ cette équation ne possède pas de solutions.

finalement l'ensemble des solutions est $S = \{1\}$.

Exercice 2

Montrons donc ce résultat par récurrence :

<u>Initialisation :</u>

u_0 est un terme positif.

<u>Hérédité</u>

Si u_n est positif, u_{n+1} l'est aussi puisque somme de nombres positifs.

On a ainsi montré que u_n est positif pour tout entier n.

2°) On pose $w_n = \dfrac{-1+u_n}{1+u_n}$, trouver une relation entre deux termes consécutifs de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a : $w_{n+1} = \dfrac{-1+\frac{1}{2}(u_n+\frac{1}{u_n})}{1+\frac{1}{2}(u_n+\frac{1}{u_n})} = (\dfrac{u_n-1}{u_n+1})^2 = w_n^2$

Donc $w_1 = w_0^2$, $w_2 = w_0^4$,

Montrons par récurrence que $w_n = w_0^{2^n}$

<u>Initialisation :</u>

La propriété est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité</u>

Si $w_n = w_0^{2^n}$ alors, $w_{n+1} = w_n^2 = (w_0^{2^n})^2 = w_0^{2^{n+1}}$.

mais $w_0 = -\dfrac{1}{3}$ on en déduit donc que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Ecrivons le terme u_n en fonction du terme w_n, on a : $u_n = \dfrac{-1-w_n}{w_n-1}$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 1. (Remarquer que le dénominateur ne s'annule jamais car $|w_n| < |w_0|$ et $|w_0| = \frac{1}{3}$, et donc que u_n a toujours un sens .)

****