Devoir 3

Corrigé

Exercice 1 : On considère la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi].$$

1. Série de Fourier trigonométrique $S(f)$ de f.

La fonction f est impaire donc les coéfficients $a_n = 0$ pour $n \geq 0$. On calcule les coéfficients b_n pour $n \geq 1$ et on a

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&\overset{f \text{ impaire}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&\overset{\text{IPP}}{=} -\frac{2}{\pi}\left[x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx \\
&= -2\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi n}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

Donc la série de Fourier de f est

$$S(f)(x) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

2. Convergence de $S(f)$.

La fonction f est 2π-périodique et C^1 par morceaux. En plus la fonction f est continue sauf dans les points $x = (2k+1)\pi$ pour $k \in \mathbb{N}$. Par le Théorème de Dirichlet la Série $S(f)$ converge (simplement) pour tout $x \in \mathbb{R}$. En plus

$$S(f)(x) = f(x), \qquad \text{pour tout } x \in]-\pi, \pi[$$

et

$$S(f)(\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi^+) + f(\pi^-)) = 0.$$

3. Valeurs des séries numériques .

On calcule

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

On évalue la série de Fourier de f en $x = \pi/2$. D'après le point 2. on a que

$$\frac{\pi}{2} = S(f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi/2).$$

Or si n paire alors $\sin(n\pi/2) = 0$. Si $n = 2p+1$ impaire alors

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(2p+1)\right) = \sin\left(\pi p + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi p) = (-1)^p.$$

Donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi/2) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - 1.$$

On calcule

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On utilise la Formule de Parseval appliquée à f et $S(f)$ et on a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2|a_0|^2 + \sum_{n\geq 1}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Donc

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^3 + \pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

et d'autre part

$$2|a_0|^2 + \sum_{n\geq 1}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = 4\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}.$$

Enfin

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2 : On considère la fonction 2π-périodique définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in (-\pi, 0], \\ \sin(x) & \text{pour } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

1. Série de Fourier trigonométrique $S(g)$ de g.

On calcule a_0.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(x) dx = \frac{1}{\pi}$$

Pour calculer a_n on utilise la formule trigonométrique $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$. Or

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin((n+1)x) dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin((n-1)x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+1}((-1)^{n+1} - 1) - \frac{1}{n-1}((-1)^{n-1} - 1)\right) \end{aligned}$$

Donc si n impaire $a_n = 0$ et si $n = 2p$ paire on a

$$a_{2p} = -\frac{1}{\pi}\frac{2}{4p^2-1}.$$

Pour calculer b_n on utilise la formule trigonométrique $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$. Or

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos((n-1)x) - \cos((n+1)x)dx, \end{aligned}$$

ainsi $b_n = 0$ pour $n \geq 2$ et $b_1 = 1/2$.

Donc la série de Fourier de g est

$$S(g)(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx) + \frac{1}{2}\sin(x).$$

2. Convergence de $S(g)$.

La fonction g est 2π-périodique et C^1 par morceaux. En plus la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Par le Théorème de Dirichlet la Série $S(g)$ converge uniformement sur $\mathbb{R}$ (donc simplement pour tout $x \in \mathbb{R}$) et en plus

$$S(g)(x) = g(x), \quad \text{pour tout } x \in]-\pi, \pi[.$$

3. Valeurs des séries numériques .

On calcule

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

On évalue la série de Fourier de g en $x = \pi/2$. D'apès le point 2. on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}\cos(n\pi) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} + \frac{1}{2},$$

donc

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Pour calculer

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}$$

on évalue la série de Fourier de g en $x = 0$ et on a

$$0 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1},$$

d'où

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

On calcule
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$
On utilise la Formule de Parseval appliquée à g et $S(g)$ et on a
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = 2|a_0|^2 + \sum_{n\geq 1}(|a_n|^2+|b_n|^2).$$
Or
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} |\sin(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1-\cos(2x) dx = \frac{1}{2}.$$
Donc
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1} + \frac{1}{4},$$
d'où le résultat demandé.