Devoir 2

à rendre le 13 Décembre 2017

Exercice 1 : Séries entières

On considère une fonction $y(x)$ qui vérifie l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients variables suivantes :

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0. \tag{1}$$

On suppose que $y(x)$ est développable en série entière au voisinage de 0, c'est à dire :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

1. Utiliser l'équation (1) pour déterminer une relation de récurrence entre les coefficients a_n de la série entière ;

2. Montrer que $a_0 = 0$;

3. Calculer les coefficients impaires a_{2p+1} en fonction $a_1 = \alpha$;

4. Calculer les coefficients paires a_{2p} en fonction $a_2 = \beta$;

5. Déterminer le rayon de convergence de la série entière ;

6. Exprimer la somme de la série entière en termes de fonctions élémentaires.

Exercice 2 : Séries de Fourier

On considère les fonction 2π-périodique définies par :

$$f(x) = |\sin(x)| \quad \text{et} \quad g(x) = \max\{\sin(x), 0\}.$$

1. Déterminer les séries de Fourier trigonométriques $S(f)$ de f et $S(g)$ de g ;

2. Étudier la convergence des séries (simple et uniforme) ;

3. Calculer les valeurs des séries numériques :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1};$$

4. En appliquant la Formule de Parseval montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$