Devoir 1 - Corrigé

Exercice 1 : On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{n+u_n}{n^2} \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

On montre que $u_n \leq 2$, $\forall n \geq 1$ par récurrence. Or $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$. Supposons que pour $n \geq 2$, on a $u_n \leq 2$, alors

$$u_{n+1} = \frac{n+u_n}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{u_n}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \leq 2.$$

Pour montrer que

$$u_n \geq \frac{1}{n-1}, \quad \forall n \geq 2, \tag{1}$$

on utilise encore une fois l'induction (ou récurrence). Pour $n = 2$, $u_2 = 2 \geq 1$. Supposons (1) vraie pour $n \geq 2$, alors en particulier,

$$u_n \geq \frac{1}{n-1} \geq 0,$$

donc

$$u_{n+1} = \frac{n+u_n}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{u_n}{n^2} \geq \frac{1}{n}.$$

Enfin on a que

$$u_n \leq \frac{n+1}{(n-1)^2}, \quad \forall n \geq 2. \tag{2}$$

car $u_n \leq 2$ pour tout n et donc

$$u_n = \frac{n-1+u_{n-1}}{(n-1)^2} \leq \frac{n+1}{(n-1)^2}.$$

Pour montrer que la suite à une limite ℓ il suffit de noter que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{(n-1)^2} = 0.$$

Donc pour le *critère de gendarmes* la suite a limite $\ell = 0$.

Exercice 2 : Soit $a > 0$. On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \\ u_0 > 0, \end{cases} \tag{3}$$

1. On montre que
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}. \tag{4}$$
En fait
$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - a =& \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)^2 - a \\ =& \frac{1}{4u_n^2}(u_n^2 + a)^2 - a \\ =& \frac{1}{4u_n^2}\left((u_n^2 + a)^2 - 4au_n^2\right) \\ =& \frac{1}{4u_n^2}\left(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2\right) \\ =& \frac{1}{4u_n^2}\left(u_n^2 - a\right)^2. \end{aligned}$$
2. Pour montrer que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour $n \geq 1$ on remarque d'abord que $u_n > 0$ (on peut le voir par récurrence). Puis grâce à la relation (4) on a que
$$u_n^2 - a = \frac{(u_{n-1}^2 - a)^2}{4u_{n-1}^2} \geq 0,$$
ce qui comporte que $u_n^2 \geq a$, d'où $u_n \geq \sqrt{a}$.
3. La suite est décroissante. En fait, pour $n \geq 1$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{u_n^2}\right) \leq 1,$$
car $\dfrac{a}{u_n^2} \leq 1$ pour le point 2. de l'exercice.
4. La suite est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, donc elle converge vers une limite $\ell > 0$, c'est à dire
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}.$$
Si on considère la limite dans la relation (3) on a que ℓ doit vérifier
$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right),$$
dont la seule solution positive est $\ell = \sqrt{a}$.
5. On utilise $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ dans la relation (4) pour avoir
$$(u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2}$$
donc, car $u_n \geq \sqrt{a}$,
$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{u_{n+1} + \sqrt{a}} \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{4}\left(\frac{u_n + \sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2. \end{aligned}$$

6. Par récurrence : on a $u_1 - \sqrt{a} \leq K$ et on suppose que pour $n \geq 1$ on a

$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{K}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}. \tag{5}$$

Alors on veut montrer (5) pour u_{n+1}. On utilise la relation au point 5. de l'exercice pour avoir que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(2\sqrt{a}\left(\frac{K}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(2\sqrt{a}\right)^2\left(\left(\frac{K}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \\ &= 2\sqrt{a}\left(\frac{K}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

(i) On note que

$$\begin{aligned} v_n &= \log(u_{n+1}) - \log(u_n) \\ &= \log(u_{n+1}/u_n) \\ &= \log\left(\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}\frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}\right) \\ &= \log\left(e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

La suite v_n donc tend vers 0 pour $n \to \infty$. En plus $v_n \leq 0$ pour tout n [1]. On peut donc utiliser le critère de comparaison pour série à termes positifs appliqué à la série de terme général $w_n = -v_n \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} w_n &= -v_n \\ &= -1 - \frac{2n+1}{2}\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= -1 - \frac{2n+1}{2}\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} + O(\frac{1}{n^4})\right) \\ &= -1 + \frac{2n+1}{2(n+1)} + \frac{2n+1}{4(n+1)^2} - \frac{2n+1}{6(n+1)^3} + O(\frac{1}{n^3}) \\ &= -1 + \frac{2n+1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{4(n+1)^2} - \frac{2n+1}{6(n+1)^3} + O(\frac{1}{n^3}) \\ &= -\frac{7}{12(n+1)^2} + O(\frac{1}{n^3}). \end{aligned}$$

Donc $w_n \sim 1/n^2$ et la série de terme général w_n est convergente. Ainsi que la série de terme général $v_n = -w_n$.

(ii) On considère la suite de sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \log(u_{n+1}) - \log(u_n) = \log(u_{N+1}) - 1.$$

Par dèfinition de série convergente il existe $L = \lim_{N\to\infty} S_N$. Donc

$$\lim_{N\to\infty} \log(u_N) = L + 1.$$

Comme exponentielle est une fonction continue on a que

$$e^{L+1} = \exp\left(\lim_{N\to\infty} \log(u_N)\right) = \lim_{N\to\infty} \exp(\log(u_N)) = \lim_{N\to\infty} u_N.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $l = e^{L+1} > 0$.

1. Preuve :

$$v_n \leq 0 \iff \left(\frac{2n+1}{2}\right)\log\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq 1 \iff \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq \frac{2}{2n+1}$$

ce qui est vrai car $\log(1+x) \geq \dfrac{2x}{2+x}$ pour tout $x \geq 0$. Il suffit d'observer qu'on a l'égalité pour $x = 0$ e pour $x > 0$ on a

$$\left(\log(1+x) - \frac{2x}{2+x}\right)' = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0.$$