Devoir 1

à rendre le 4 Novembre 2015

Exercice 1 : On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{n+u_n}{n^2} \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $u_n \leq 2$, $\forall n \geq 1$.
2. Montrer que
$$\frac{1}{n-1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{(n-1)^2} \quad \forall n \geq 2.$$
3. Montrer que la suite à une limite ℓ.

Exercice 2 : Soit $a > 0$. On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \\ u_0 > 0, \end{cases}$$

1. Montrer que
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$
2. Montrer que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour $n \geq 1$.
3. Montrer que la suite est décroissante.
4. En déduire que la suite converge vers $\sqrt{a}$.
5. Donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$. (Hint : utiliser la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$).
6. Montrer que, si $u_1 - \sqrt{a} \leq K$, pour $n \geq 1$ on a
$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{K}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$

Exercice 3 (Formule de Stirling) : Soit

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

(*i*) Montrer que la série de terme général $v_n = \log(u_{n+1}) - \log(u_n)$ converge.
(*ii*) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $l > 0$.

Remarque : De l'exercice 3, comme $l = \sqrt{2\pi}$, on obtient la *formule de Stirling*

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n} \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$