Exercice n° 1 : PGCD (A ; B) avec A = 17 640 et B = 30 8700

1°/ $17\,640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$

$30\,8700 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3$

D'où $17\,640 \wedge 30\,8700 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 = 8\,820$

2°/ B/A devient irréductible si on divise B par $A \wedge B$ et A par $A \wedge B$

$B/A = 30\,8700 / 17\,640 = (30\,8700 / 8\,820) / (17\,640 / 8\,820) = 35 / 2$

3°/ $B/A = 35 / 2 = 175 / 10^1$

donc B/A appartient à $\mathbb{D}$

Exercice n° 2

1°/ $B = (2x - 1)^2 - 4(x + 2)^3 = 4x^2 - 4x + 1 - 4 (x^3 + 6x^2 + 12x + 8)$

<=> $B = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^3 - 24x^2 - 48x - 32$

<=> $B = -4x^3 - 20x^2 - 52x - 31$

2°/ $C = (4x + 1)^2 - (2x - 3)^2$

<=> $C = [(4x + 1) - (2x -3)] [(4x + 1) + (2x - 3)] = (2x + 4) (6x - 2)$

<=> $C = 4 (x + 2) (3x -1)$

Exercice n° 3

1°/ Forme canonique de $f(x) = - 9x^2 + 10x - 1$

<=> $f(x) = - 9 (x^2 - 10/9x + 1/9) = - 9 [(x - 5/9)^2 - (5/9)^2 + 1/9)] = - 9 [(x - 5/9)^2 - 25/81 + 1/9]$

<=> $f(x) = - 9 [(x - 5/9)^2 - 25/81 + 9/81] = - 9 [(x - 5/9)^2 - 16/81] = - 9 (x - 5/9)^2 + 16/9$

2°/ $f(x) = - 9 (x - 5/9)^2 + 16/9 = - 9 [(x - 5/9)^2 - 16/81] = - 9 [(x - 5/9)^2 - (4/9)^2]$

<=> $f(x) = - 9 [(x - 5/9) - (4/9)] [(x - 5/9) + (4/9)] = - 9 (x - 1) (x - 1/9)$

3°/ $f(x) \leqslant 0$

<=> $x - 1 \geqslant 0$ ou $x - 1/9 \geqslant 0$

<=> $x \geqslant 1$ ou $x \geqslant \frac{1}{9}$

x	$-\infty$		1/9		1		$+\infty$
- 9		-		-		-	
(x - 1/9)		-	0	+		+	
(x - 1)		-		-	0	+	
signe de f(x)		-	0	+	0	-	

Donc $f(x) \leqslant 0$ <=> $x \in \,]-\infty\,;1/9] \cup [1\,;+\infty[$

Exercice n° 4

Résoudre (S) $\begin{cases} -3x + 4y = 24 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \times 5 - 2 \times 4 = -23 \neq 0$

Le système de ces deux équations est un système de Cramer et admet un unique couple solution.

Méthode de combinaison

$$(S) \begin{cases} x = \dfrac{5 \times 24 - 4 \times 7}{5 \times (-3) - 4 \times 2} = \dfrac{120 - 28}{-15 - 8} = -\dfrac{92}{23} = -4 \\[2ex] y = \dfrac{2 \times 24 - (-3) \times 7}{2 \times 4 - (-3) \times 5} = \dfrac{48 + 21}{8 + 15} = \dfrac{69}{23} = 3 \end{cases}$$

Méthode des déterminants

$$(S) \begin{cases} x = \dfrac{24 \times 5 - 7 \times 4}{-23} = -\dfrac{92}{23} = -4 \\[2ex] y = \dfrac{2 \times 24 - (-3) \times 7}{2 \times 4 - (-3) \times 5} = \dfrac{48 + 21}{8 + 15} = \dfrac{69}{23} = 3 \end{cases}$$

Méthode matricielle

$$(S) \iff \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$$

La concaténation donne :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 4 & 24 \\ 2 & 5 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L1 \leftarrow -L_1 / 3) \\ (L2 \leftarrow 3L_2 + 2L_1 / -23) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4/3 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L1 \leftarrow L_1 + 4L_2 / 3) \\ (L2 \leftarrow L_2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L1 \leftarrow L_1 + 4L_2 / 3) \\ (L2 \leftarrow L_2) \end{array}$$

D'où $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$ $\quad S = \{ (-4 ; 3) \}$

Exercice n° 4 (suite)

Méthode par inversion de matrice par concaténage

(S) <=> AX = B

$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$

dét (A) = - 23 $\neq$ 0 (cf. page précédente), alors A^{-1} existe.

$A^{-1} = (1/-23) x \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1/-23) \begin{pmatrix} 5 \times 24 - 4 \times 7 \\ -2 \times 24 - 3 \times 7 \end{pmatrix}$

$X = (1/-23) \begin{pmatrix} 120 - 28 \\ -48 - 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -92/23 \\ 69/23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

S = { (-4 ; 3) }

Exercice n° 5

1°/ $P(x) = -4x^4 + 25x^3 - 42x^2 + 25x - 4$

$P(x) = ax^4 + bx^3 - cx^2 + bx + a$

avec a = -4, b = 25 et c = -42

Il s'agit d'une équation bicarrée.

$P(0) = -4 \times 0^4 + 25 \times 0^3 - 42 \times 0^2 + 25 \times 0 - 4$

P(0) = -4, -4 $\neq$ 0

Donc 0 n'est pas racine de P.

P(x) = 0 étant une équation bicarrée, si k $\neq$ 0 est racine de P, alors P (1/k) = 0.

Soit 1/k racine de P. En effet $P(\frac{1}{k}) = \frac{P(k)}{k^4} = 0$

Pour x $\neq$ 0, on pose x + 1/x = u et $u^2 = x^2 + 2 + 1/x^2$

Soit $u^2 - 2 = x^2 + 1/x^2$

Exercice n° 5 - 1°/ (suite)

$P(x) = 0 \iff -4x^4 + 25x^3 - 42x^2 + 25x - 4 = 0, x \neq 0$

$\iff x^2(-4x^2 + 25x - 42 + 25/x - 4/x^2) = 0, x \neq 0$

$\iff (-4x^2 + 25x - 42 + 25/x - 4/x^2) = 0, x \neq 0$

$\iff -4(x^2 + 1/x^2) + 25(x + 1/x) - 42 = 0, x \neq 0$

$$\iff \begin{cases} -4(u^2 - 2) + 25 \times u - 42 \neq 0 \\ u = x + 1/x, x \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -4u^2 + 8 + 25u = 0 \\ u = x + 1/x, x \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -4u^2 + 25u - 34 = 0 \\ u = x + 1/x, x \neq 0 \end{cases}$$

$Q(u) = 0 = -4u^2 + 25u - 34 = 0$

$Q(u) = a'u^2 + b'u - c'$

avec $a' = -4$, $b' = 25$ et $c' = -34$

Son discriminant Δ vaut

$\Delta = b'^2 - 4a'c' = 25^2 - 4 \times (-4) \times (-34) = 625 - 544$

$\Delta = 81, \Delta > 0$

D'où $u_1 = (-b' - \sqrt{\Delta})/2a'$ et $u_2 = (-b' + \sqrt{\Delta})/2a'$

$u_1 = 17/4$ et $u_2 = 2$

$$(N) \begin{cases} x + 1/x = u_1 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad (O) \begin{cases} x + 1/x = u_2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Résolution de (N)

$x + 1/x = 17/4, x \neq 0$

$x^2 + 1 = 17/4x, x \neq 0$

$4x^2 + 4 = 17x, x \neq 0$

$4x^2 + 4 - 17x, x \neq 0$

(N) : $4x^2 - 17x + 4 = 0, x \neq 0$

(N) : $ax^2 + bx + c = 0, x \neq 0$

avec $a = 4$, $b = -17$ et $c = 4$

Exercice n° 5 - 1°/ (suite)

Le discriminant du trinôme de (N) : Δ

$\Delta = b^2 - 4ac = - 17^2 - 4 \times 4 \times 4 = 289 - 64$

$\Delta = 225$, $\Delta > 0$

(N) : $4x^2 - 17x + 4 = 4 (x - x1) (x-x2)$

avec $x_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/ 2a$ et $x_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a$

$x_1 = 1/4$ et $x_2 = 4$

Résolution de (O)

$x + 1/x = 2, x \neq 0$

$x^2 + 1 = 2x, x \neq 0$

$x^2 + 1 - 2x = 0, x \neq 0$

$(x - 1)^2 = 0, x \neq 0$

$x = 1$

$$P(x) = 0 \iff \begin{cases} -4 u^2 + 25 u - 34 = 0 \\ u = x + 1/x, x \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (N) = 0 \\ \text{ou } (O) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1/4 \text{ ou } x = 1 \\ \text{ou } x = 4 \end{cases}$$

S = { 1/4 ; 1 ; 4 }

2°/ Selon la question précédente : $P(x) = - 4 (x-1)^2 (x -4) (x - 1/4)$

Selon l'exercice N° 3 (question 2) : $- 9 x^2 + 10 x - 1 = - 9 (x - 1) (x - 1/9)$

$$\text{alors } f(x) = \frac{- 9 x^2 + 10 x - 1}{- 4 x^4 + 25x^3 - 42x^2 + 25x - 4}$$

$$\iff f(x) = \frac{- 9 (x - 1/9) (x - 1)}{- 4 (x - 1)^2 (x - 4) (x - 1/4)}$$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$ - { 1/4 ; 1 ; 4 }

Exercice n° 5 - 2° / (suite)

x	$-\infty$		$1/9$		$1/4$		1		4		$+\infty$
$(x-1)^2$		+		+		+	0	+		+	
$-4(x-4)(x-1/4)$		-		-	0	+		+	0	-	
$-9(x-1/9)(x-1)$		-	0	+		+	0	-		-	
signe de $f(x)$		+	0	-	‖	+	‖	-	‖	+	

Donc $f(x) \leq 0$ pour x appartient à $[1/9 ; 1/4[\cup]1 ; 4[$