



Cours d'Analyse Numérique Matricielle et d'Optimisation

Philippe Destuynder

Calcul Scientifique CNAM Paris 292 rue saint Martin 75003
mél: destuynd@cnam.fr

30 janvier 2006

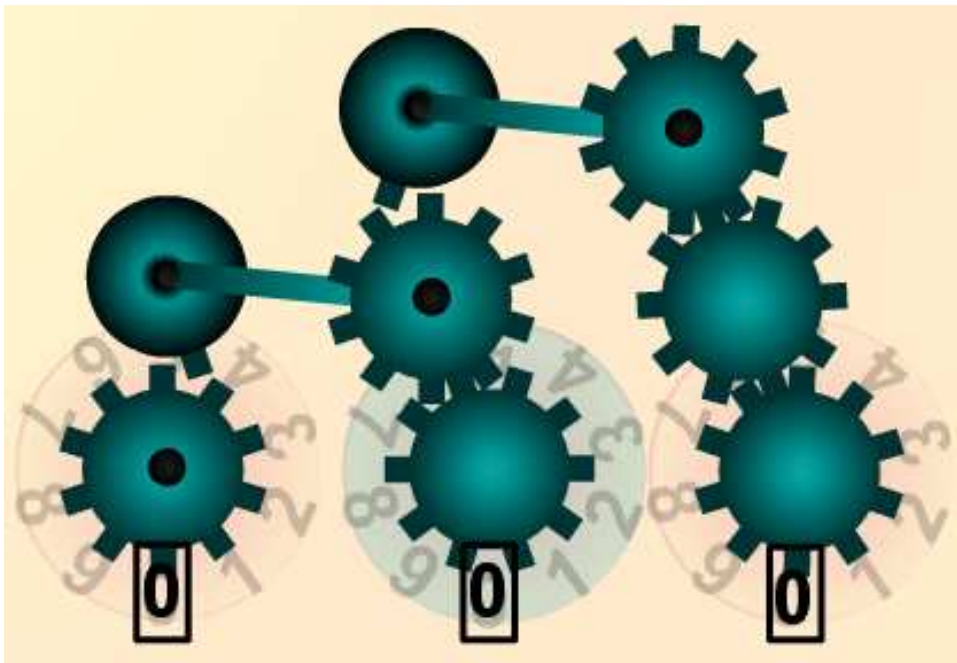


FIG. 1 – Machine à calculer de Blaise Pascal

Table des matières

I	Introduction aux méthodes décrites dans ce cours	7
I.1	La résolution des systèmes linéaires	7
I.2	Le calcul des valeurs propres des matrices	9
I.3	L'optimisation	12
I.4	Le contrôle des systèmes linéaires	15
II	La méthode de Gauß et ses variantes	19
II.1	La factorisation de Gauß	19
II.2	L'algorithme de Gauß	23
II.3	Pivotage et astuces de programmation	23
II.4	Décompte des opérations	24
II.5	Cas d'une matrice symétrique définie positive	24
II.6	Possibilités de méthodes par blocs, aspects opérationnels	26
II.7	Stockage des matrices creuses et bandes	27
II.7.1	Stockage en ligne de ciel	27
II.7.2	Stockage Morse	29
II.8	Vectorisation et parallélisation	29
II.9	Conclusions	30
III	Introduction à l'analyse matricielle	31
III.1	Normes sur un espace vectoriel	31
III.2	Convergence dans un espace vectoriel	33
III.2.1	Exemples élémentaires de résultats d'analyse vectorielle	33
III.3	Normes matricielles vectorielles et normes subordonnées	34
III.4	Quelques propriétés de convergence des suites vectorielles et matricielles	38
III.5	Robustesse et conditionnement des système linéaires	41

IV Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires	43
IV.1 La méthode de Jacobi	43
IV.2 La méthode du point fixe	44
IV.3 La méthode de relaxation de Gauß-Seidel	46
IV.4 La méthode de surrelaxation	46
V Calcul de valeurs et de vecteurs propres de matrices	49
V.1 La puissance itérée inverse avec shift	49
V.1.1 Description de l'algorithme élémentaire	50
V.1.2 Auto-ajustement de μ	51
V.1.3 Calcul des autres valeurs et vecteurs propres	52
V.1.4 Cas d'une matrice M de pondération	52
V.2 Itération sur un sous-espace	53
V.3 La méthode de Jacobi	53
V.4 La méthode de Householder pour tridiagonaliser les matrices	53
V.5 La méthode de Lanczos	53
V.6 La méthode de bissection de Givens	53
V.7 La méthode de Francis pour des matrices arbitraires	54
V.8 Recherche du noyau d'une matrice	54
VI Introduction à l'optimisation	55
VI.1 Position du problème	55
VI.2 Equivalence entre le problème d'optimisation et un système linéaire	56
VI.3 Cas d'une matrice symétrique positive mais non définie	57
VI.3.1 Procédé de Schmidt pour orthogonaliser	57
VI.3.2 Construction d'un algorithme de résolution du système linéaire lorsque A est singulière	58
VI.4 L'algorithme du gradient	59
VI.5 Convergence de l'algorithme du gradient	61
VI.5.1 Convergence du gradient à pas optimal	61
VI.5.2 Convergence du gradient à pas constant	62
VI.6 Le gradient conjugué	63
VI.6.1 Description de l'algorithme	63
VI.6.2 Justification des conjugaisons	64
VI.7 Conclusion	65

VII Optimisation de fonctions convexes	67
VII.1 Digest sur les fonctions convexes	67
VII.2 Algorithme du gradient à pas constant pour minimiser une fonctionnelle convexe	71
VII.3 Algorithme de Newton	72
VII.4 Conclusion	74
VIII Prise en compte des contraintes linéaires en optimisation quadratique	75
VIII.1 Existence et unicité d'une solution	75
VIII.2 Caractérisation de la solution de VIII.1	76
VIII.2.1 Projection orthogonale sur $\text{Ker}(B)$	76
VIII.3 Construction de la projection P_K	79
VIII.4 Introduction de la dualité	80
VIII.5 Une interprétation du système dual	81
VIII.5.1 La méthode de Uzawa	81
VIII.5.2 La méthode de Uzawa régularisée	82
VIII.5.3 L'algorithme de Arrow-Urwicz	84
VIII.6 La pénalisation	86
VIII.7 Conclusion	88
IX Un exemple d'optimisation de fonctionnelles non différentiables	89
IX.1 Le problème initial	89
IX.2 Analyse du problème posé lorsque A est définie	90
IX.3 Régularisation du problème non dérivable	93
IX.3.1 Calcul de la dérivée Gâteaux de J^μ	93
IX.3.2 Analyse du problème d'optimisation régularisé	95
IX.3.3 Etude de l'équation de Euler du modèle régularisé	95
IX.4 Algorithme de résolution du type gradient	97
IX.5 Une méthode de dualité	99
IX.6 Conclusion	101
X Optimisation convexe	103
X.1 Existence et unicité de solution	103
X.2 Caractérisation des solutions	104
X.3 Projection sur le convexe K	104
X.4 L'algorithme du gradient projeté	105

X.5	Introduction de la dualité	106
X.5.1	Formalisme théorique	106
X.5.2	Algorithme de Uzawa	109
X.6	La méthode de pénalisation	110
X.7	Conclusion	110
XI	Introduction au contrôle optimal	111
XI.1	Un problème modèle	111
XI.2	Quelques résultats mathématiques utiles	113
XI.3	Calcul de la dérivée Gâteaux de J	116
XI.4	Relation d'optimalité	116
XI.5	Méthodes de calcul du contrôle optimal	117
XI.5.1	Algorithme du gradient à pas constant	117
XI.5.2	Résolution par la méthode de Ricatti	117
XI.6	Passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$	118
XI.6.1	Une méthode asymptotique	118
XI.6.2	Résultat de convergence	122
XI.7	Résolution approchée du modèle de contrôle optimal	123
XI.8	Conclusions	124

Introduction

Qu'est-ce que l'analyse numérique ?

Il y a un siècle, les mathématiciens travaillaient à trouver des solutions analytiques aux équations proposées par les physiciens et les mécaniciens. Parfois, la complexité de ces équations était telle, qu'ils mirent beaucoup d'énergie à simplifier ces modèles afin d'en obtenir des plus simples pour lesquels les outils disponibles, en particulier l'analyse complexe, pouvait fonctionner. Ces apports considérables ont constitués le fond de roulement de l'ingénieur de bureau d'étude. Cependant ils se sont vite révélés insuffisants et ce n'est qu'avec l'apparition des premiers calculateurs au milieu du $XX^{\text{ème}}$ siècle, qu'une autre voie beaucoup plus prometteuse et complémentaire, a vu le jour : c'est l'analyse numérique. Les premiers problèmes furent obtenus par discrétisation d'équations aux dérivées partielles en utilisant la célèbre méthode des différences finies. Cela permit de se ramener à la résolution d'un système matriciel. Très vite, les limites de cette méthode sont apparues principalement en raison des géométries complexes, des milieux hétérogènes et des conditions aux limites variées que l'ingénieur souhaitait introduire dans ses modèles. L'arrivée de la méthode des éléments finis a alors apporté une solution efficace et agréable à tous ces problèmes et a transformé tous les modèles d'équations aux dérivées partielles de la physique en systèmes matriciels (linéaires ou non). L'objet de ce cours est de donner les principales méthodes dont dispose le scientifique pour résoudre ces systèmes.